



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
TESE DE DOUTORADO



# **Recentes avanços em sistemas dissipativos com retardo governados por equações diferenciais parciais**

*Carlos Alberto da Silva Nonato*

SALVADOR, BA

2022



Carlos Alberto da Silva Nonato

# **Recentes avanços em sistemas dissipativos com retardo governados por equações diferenciais parciais**

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Orientador: Carlos Alberto Raposo da Cunha

SALVADOR, BA

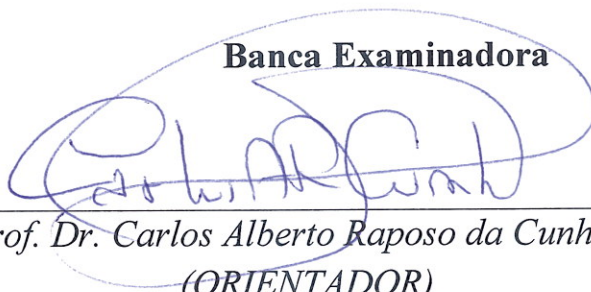
2022

*"Recentes avanços em sistemas dissipativos com retardo governado por equações diferenciais parciais"*

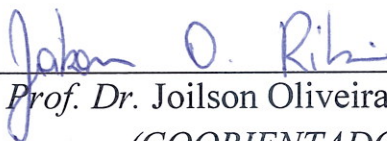
**CARLOS ALBERTO DA SILVA NONATO**

Tese apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

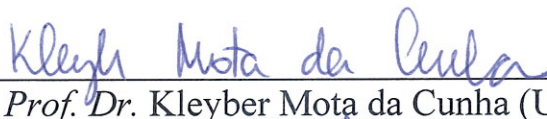
**Banca Examinadora**



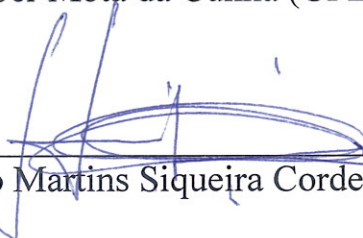
*Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (UFBA)*  
(ORIENTADOR)



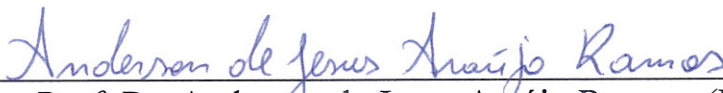
*Prof. Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro (UFBA)*  
(COORDINADOR)



*Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (UFBA)*



*Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (UFPA)*



*Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (UFPA)*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal da Bahia  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- D722c      Nonato, Carlos Alberto S.  
              Recentes avanços em sistemas dissipativos com retardo governados por equações diferenciais parciais / Carlos Alberto da Silva Nonato. – SALVADOR, BA, 2022  
              85 f. : il. color
- Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA, SALVADOR, BA, 2022.  
              Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
1. Equação de ondas. 2. Inchaço elástico poroso. 3. Vigas laminadas. 4. Pesos e retardo não constantes. 5. Retardo de Kevin-Voigt. 6. Retardo forte. 7. Decaimento exponencial. 8. Decaimento polinomial. I. da Cunha, Carlos Alberto Raposo. Orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Recentos avanços em sistemas dissipativos governados por equações diferenciais parciais.
-



*Aos meus pais, familiares e amigos.*

*À minha esposa, Edvânia.*





# Agradecimentos

Não poderia deixar de iniciar agradecendo ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha, que aceitou me orientar e dispensou um inestimável auxílio na elaboração deste trabalho e em nossa pesquisa ao longo de todo o doutorado.

Outro professor muito especial é meu co-orientador, Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro, que também foi meu orientador no mestrado e que sempre me deu todo o suporte necessário.

Agradeço a todos os professores e colegas com quem convivi ao longo da graduação, mestrado e doutorado. Foi um grande privilégio ter convivido com pessoas tão maravilhosas.

Quero registrar um agradecimento especial ao Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha, ao Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos e ao Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, que gentilmente aceitaram o convite para participar da banca examinadora e dispensaram seu precioso tempo para leitura de meu trabalho.

Agradeço ainda aos seguintes colegas que, na graduação, mestrado ou no doutorado, tornaram essa árdua caminhada mais leve e divertida: Ives Vergne, Paulo Andrade, Jeferson Aragão, Pedro Henrique, Diego Daltro, Gideone Ribeiro, Crisia Ramos, Ênio Carlos, Paulo Cesar, Cleidiane Araújo, Fabrício Santos, Edward Landi, Jacqueline Cintra, Diogo Soares, Adriano Cattai e todos os demais colegas de convívio das salas 18 e 282.

Registro também meus agradecimentos para meus amigos de infância e outros grandes amigos que surgiram em meu caminho e que mesmo longe, tenho guardado em meu coração. São pessoas que sempre me deram apoio e com quem compartilhei minhas alegrias dentro e fora da universidade: Ailton Santos, Artur Santos, Célio Medeiros Costa, Ênio Soares, Wliana Cruz, Isaac Aragão (Favela), Édipo Resende, Lucas Barbosa e sua adorável esposa Cleide.

Um agradecimento muito especial à minha esposa, Edvânia da Silva Carvalho, pelo companheirismo, pelo constante incentivo. Sem seu apoio e amor, tudo isso teria se concretizado de forma muito mais difícil.

Agradeço imensa e eternamente aos meus pais, Carlos Santos Nonato e Josenita Souza da Silva Nonato, foi muito especial para mim ter a presença de vocês no dia de minha defesa da tese e quero deixar registrado que todo esse esforço foi para dar orgulho a vocês.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para consecução deste trabalho, meus

sinceros agradecimentos.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro concedido durante todo o meu doutorado.

Por fim, e acima de tudo, agradeço a Deus!

*A educação é o nosso passaporte para o futuro,  
pois, o amanhã pertence as pessoas que se preparam hoje.”*

*Malcolm X*

★ 1925 — † 1965



# Resumo

Este trabalho trata da existência global de solução e do comportamento assintótico para três modelos distintos: a equação de onda, inchamento de solos elásticos porosos com saturação de fluido, e o modelo de vigas laminadas. Para todos os modelos, é aplicada a teoria dos semigrupos para provar a existência global da solução. Na análise do comportamento assintótico, são aplicadas técnicas distintas. Nos dois primeiros modelos citados acima, considera-se a ação dos pesos e o retardo não constantes. O decaimento exponencial é provado usando o método dos multiplicadores. Para o modelo de vigas laminadas, levando-se em conta a ação do amortecimento viscoelástico e um forte retardo de tempo, duas situações são observadas: estabilidade exponencial se a velocidade de propagação das ondas for a mesma, caso contrário, o decaimento polinomial com taxa  $t^{1/2}$ .

**Palavras-chave:** Equação de ondas, inchaço elástico poroso, vigas laminadas, pesos e retardo não constantes, retardo de Kelvin-Voigt, retardo forte, decaimento exponencial, decaimento polinomial.



# Abstract

This work deals with the global existence of solution and the asymptotic behavior for three distinct models: The wave equation, swelling of porous elastic soils with a saturation of fluid, and the laminated beams model. For all models, is applied the semigroup theory to prove the global existence of the solution. In the analysis of the asymptotic behavior, are applied distinct technics. In the first two models cited above, is considered the action of weights and non-constants delay. The exponential decay is proved by using the multipliers method. For the laminated beams model, is take into account the action of viscoelastic damping and a strong time delay, two situations are observed: Exponential stability if the propagation speed of the waves is the same, otherwise, the polynomial decay with rate  $t^{1/2}$ .

**Keywords:** Wave equation, porous elastic swelling, laminated beams, non-constant weights and delay, Kelvin-Voigt delay, strong delay, exponential decay, polynomial decay.





---

# Sumário

---

INTRODUÇÃO . . . . .	1
1 PRELIMINARES . . . . .	3
1.1 Análise Funcional e Teoria Espectral . . . . .	3
1.2 Espaços funcionais e espaços de Sobolev . . . . .	7
1.3 Semigrupos de classe $C_0$ gerados por operadores dissipativos . . . . .	11
1.4 Estabilidade . . . . .	13
2 EQUAÇÃO DE ONDAS COM RETARDO E PESOS NÃO CONSTANTES . . . . .	15
2.1 Introdução . . . . .	15
2.2 Notações e preliminares . . . . .	17
2.3 Solução global . . . . .	21
2.4 Comportamento assintótico . . . . .	28
3 ESTABILIZAÇÃO DE SOLOS ELÁSTICOS POROSOS INCHADOS COM SATURAÇÃO DE FLUIDO, RETARDO E PESOS NÃO CONSTANTES . . . . .	33
3.1 Introdução . . . . .	33
3.2 Preliminares . . . . .	38
3.3 Solução global . . . . .	39
3.4 Estabilidade exponencial . . . . .	45
4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE VIGAS LAMINADAS COM AMORTECIMENTO KELVIN- VOIGT E ATRASO DE TEMPO FORTE . . . . .	53
4.1 Introdução . . . . .	53
4.2 Solução global . . . . .	56
4.3 Falta de estabilidade exponencial . . . . .	60
4.4 Comportamento assintótico . . . . .	62
4.4.1 Dissipação da energia . . . . .	63
4.4.2 Lemas técnicos . . . . .	63
4.4.3 Estabilidade exponencial . . . . .	67
4.4.4 Estabilidade polinomial . . . . .	69
REFERÊNCIAS . . . . .	77

APÊNDICE A PUBLICAÇÕES . . . . . 83

# Introdução

O estudo de equações diferenciais parciais (EDP's) está presente em diversas áreas da matemática, como por exemplo: análise matemática, teoria da medida, topologia, geometria diferencial, ciência da computação. Nos últimos anos, a aplicação de EDP's para modelar fenômenos físicos reais, se tornou também, uma ferramenta importante para outras áreas, como a ciência dos materiais, mecânica dos fluidos, mecânica quântica, matemática financeira, biologia e biomedicina e ciências ambientais.

Dentre os diversos ramos de estudo das equações diferenciais parciais, neste trabalho é investigado o comportamento assintótico das soluções de sistemas dissipativos. Na literatura, diferentes técnicas têm sido utilizadas em problemas de estabilidade, a exemplo, do método de Kormonik ((KOMORNIK; ZUAZUA, 1990)), do método de Nakao ((NAKAO, 1977)) e do método de energia ((RIVERA, 1992)). Nesse sentido, foram adotadas duas técnicas analíticas para obter a estabilidade.

Para a estabilidade exponencial foi aplicado o método dos multiplicadores (A. Haraux ((HARAUX, 1985)) e V. Komornik ((KOMORNIK, 1994))). Para a prova do decaimento polinomial foram analisadas as normas uniformes, a partir do método desenvolvido por A. Borichev e Y. Tomilov ((BORICHEV; TOMILOV, 2010)).

A proposta do presente trabalho é estudar a existência global e o comportamento assintótico de soluções de três modelos distintos governados por equações diferenciais parciais, os quais estão sob a ação de uma força de retardo. O retardo, em certos casos pode provocar a explosão da solução em tempo finito, para um sistema que sem a ação do retardo é assintoticamente estável. Estes modelos foram selecionados dentre os trabalhos publicados, os quais estão relacionados no apêndice.

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro são apresentadas as principais ferramentas da teoria da Análise Funcional, de espaços de Sobolev, de semigrupos de classe  $C_0$  e resultados sobre estabilidade exponencial e polinomial de sistemas dissipativos. Estes resultados serão utilizados nos demais capítulos, que são independentes um do outro e abordam problemas específicos.

Ressaltamos que com esta estrutura, para facilitar a compreensão do texto, cada capítulo possui uma introdução específica, onde são apresentados revisões da literatura, descrevendo a importância do problema proposto e um detalhamento de como o capítulo está estruturado.

No Capítulo 2, consideramos a equação de ondas com retardo e pesos não constantes dada por

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \mu_1(t)u_t(x, t) + \mu_2(t)u_t(x, t - \tau(t)) = 0$$

em um domínio limitado. Sob condições adequadas sobre os pesos não constantes  $\mu_1(t)$  e  $\mu_2(t)$  e sobre o retardo não constante  $\tau(t)$ , provamos a existência da solução global combinando a teoria de semigrupos com a técnica da norma variável de Kato e para a prova do decaimento exponencial foi utilizado o método da energia.

No Capítulo 3, estudamos a solução global e a estabilidade exponencial para o sistema unidimensional na teoria isotérmica linear de solos elásticos porosos inchados sujeitos a pesos e retardo variáveis no tempo, dado por

$$\begin{aligned} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \mu_1(t)z_t + \mu_2(t)z_t(x, t - \tau(t)) &= 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} &= 0. \end{aligned}$$

A existência da solução global para o problema em questão foi provada utilizando a mesma técnica usada no Capítulo 2. Para provar a estabilidade exponencial, aplicamos o método da energia sem a suposição de velocidades de ondas iguais.

No Capítulo 4, foi considerado um modelo de vigas laminadas combinando amortecimento viscoelástico e forte amortecimento retardado. O sistema é descrito pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} + G(\psi - u_x)_x &= 0, \\ I_\rho(3S - \psi)_{tt} - D(3S - \psi)_{xx} - G(\psi - u_x) - \mu_1(3S - \psi)_{xxt} - \mu_2(3S - \psi)_{xxt}(x, t - \tau) &= 0, \\ 3I_\rho S_{tt} - 3DS_{xx} + 3G(\psi - u_x) + 4\delta S + 4\gamma S_t &= 0. \end{aligned}$$

A solução global é provada usando a teoria de semigrupos de operadores lineares. Também foi provado a falta de estabilidade exponencial quando a velocidade de propagações das ondas não são iguais. De fato, foi mostrado nesta situação que o sistema vai a zero polinomialmente com taxa  $t^{-1/2}$ . Por outro lado, construindo alguns multiplicadores adequados, foi estabelecido que a energia decai exponencialmente desde que a velocidade de propagações de onda se mantenham.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo enunciaremos os conceitos básicos e apresentamos os resultados teóricos cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

### 1.1 Análise Funcional e Teoria Espectral

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional e Teoria Espectral que serão muito importantes para o desenvolvimento de todo o trabalho.

#### Definição 1.1

Seja  $X$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K}$  pode ser  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Uma norma em  $\mathbb{K}$  é uma função  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer  $x, y \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

- (i)  $\|x\|_X \geq 0$  e  $\|x\|_X = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- (ii)  $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X$ ;
- (iii)  $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ .

Um espaço vetorial normado é um par  $(X, \|\cdot\|_X)$  onde  $X$  é um espaço vetorial e  $\|\cdot\|_X$  é uma norma em  $X$ . Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos apenas  $\|\cdot\|$  ao invés de  $\|\cdot\|_X$ .

A norma  $\|\cdot\|$  em um espaço vetorial  $E$  sempre está associada a uma métrica  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dada por

$$d(x, y) := \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

#### Definição 1.2 (Espaços de Banach)

Um espaço vetorial normado cuja métrica associada é completa é chamado de espaço vetorial completo, ou Espaço de Banach.

**Definição 1.3** (Forma sesquilinear)

Seja  $E$  um espaço vetorial complexo. Uma forma sesquilinear em  $E$  é uma aplicação  $a : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ , que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer  $u, v, w \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

- (i)  $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$ ;
- (ii)  $a(\lambda u, w) = \lambda a(u, w)$ ;
- (iii)  $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$ ;
- (iv)  $a(u, \lambda w) = \overline{\lambda} a(u, w)$ .

**Definição 1.4**

Uma forma sesquilinear  $a$  sobre um espaço normado  $X$  é denominada limitada ou contínua se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \text{para todo } u, v \in X.$$

**Definição 1.5**

Uma forma sesquilinear  $a$  sobre um espaço normado  $X$  é dita coerciva se existe uma constante  $\beta > 0$  tal que

$$|a(v, v)| \geq \beta \|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in X.$$

**Definição 1.6**

Seja  $E$  um espaço vetorial complexo. Um funcional  $T : E \rightarrow \mathbb{C}$  é dito linear se satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer  $u, v \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

- (i)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ ;
- (ii)  $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ ;

e é dito antilinear se

- (i)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ ;
- (ii)  $T(\lambda u) = \overline{\lambda} T(u)$ .

**Definição 1.7**

Um funcional  $T : X \rightarrow \mathbb{C}$ , sobre um espaço normado  $X$  é dito limitado se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|T(u)| \leq C \|u\|, \quad \text{para todo } u \in X.$$

Se  $X$  e  $Y$  forem espaços vetoriais normados, denotaremos por  $L(X; Y)$  a classe dos operadores lineares de  $X$  em  $Y$  e por  $\mathcal{L}(X; Y)$  a classe dos operadores lineares e limitados de  $X$  em  $Y$ .

O próximo resultado nos traz várias equivalências sobre a continuidade de um operador linear:

**Teorema 1.8**

Seja  $u \in L(X; Y)$ . São equivalentes:

- (i)  $u$  é lipschitziano;
- (ii)  $u$  é uniformemente contínuo;
- (iii)  $u$  é contínuo;
- (iv)  $u$  é contínuo em algum ponto de  $X$ ;
- (v)  $u$  é contínuo na origem;
- (vi)  $\sup \{\|u(x)\|; x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$ ;
- (vii) Existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\|u(x)\| < C \|x\|$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.* Veja ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEXEIRA, 2015), Teorema 2.1.1) □

É fácil ver que  $\mathcal{L}(X; Y)$  é um espaço vetorial com as operações usuais e que os itens (vi) e (vii) do teorema anterior definem uma norma em  $\mathcal{L}(X; Y)$ :

**Proposição 1.9**

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados.

- (i) A expressão

$$\|u\| = \sup \{\|u(x)\|; x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço  $\mathcal{L}(X; Y)$ ;

- (ii)  $\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$  para todo  $u \in \mathcal{L}(X; Y)$  e  $x \in X$ ;
- (iii) Se  $Y$  for Banach, então  $\mathcal{L}(X; Y)$  também é Banach.

*Demonstração.* Veja ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEXEIRA, 2015), Teorema 2.1.4) □

Quando  $Y = \mathbb{K}$ , ao invés de escrevermos  $\mathcal{L}(X; \mathbb{K})$ , denotaremos por  $E'$  e chamaremos de espaço dual topológico de  $X$ , ou simplesmente dual de  $X$ , e seus elementos são funcionais lineares. Como  $\mathbb{K}$  é completo, segue que  $X'$  é Banach.

**Teorema 1.10 (Hahn-Banach)**

Seja  $E$  um espaço vetorial complexo e  $p : E \rightarrow [0, \infty)$  um funcional sublinear, isto é,

- (i)  $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ , para todo  $u, v \in E$ ;
- (ii)  $p(\alpha u) = |\alpha| p(u)$ , para todo  $u \in E$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Se  $f : Z \rightarrow \mathbb{C}$  é um funcional linear definido no subespaço  $Z \subset E$  com  $|f(u)| \leq p(u)$ , então  $f$  possui uma extensão linear  $F : Z \rightarrow \mathbb{C}$  dominada por  $p$ , ou seja,

$$F(w) = f(w) \text{ para todo } w \in Z, \text{ e } |F(u)| \leq p(u) \text{ para todo } u \in E.$$

$F$  é chamada de extensão de Hahn-Banach de  $f$ .

*Demonstração.* Veja ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEXEIRA, 2015), Teorema 3.1.2). □

### Definição 1.11

Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Um produto interno em  $X$  é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

que satisfaz:

$$(i) \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \text{ para todo } u, v, w \in X;$$

$$(ii) \quad \langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle, \text{ para todo } u, v \in X, \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}.$$

### Definição 1.12 (Espaço de Hilbert)

Um espaço vetorial  $H$  com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno, isto é  $\|\cdot\|_H^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , é denominado de espaço de Hilbert. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach.

### Teorema 1.13 (Lax-Milgran)

Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma sesquilinear limitada e coerciva. Então, para todo funcional  $T : H \rightarrow \mathbb{C}$  antilinear limitado, existe um único  $u \in H$  tal que

$$a(u, v) = T(v), \quad \text{para todo } v \in H.$$

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Corollary 5.8). □

### Teorema 1.14 (Desigualdade de Young)

Sejam  $1 < p < \infty$  e  $p' \in \mathbb{R}$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

para todos  $a, b \geq 0$ .

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Theorem 4.6). □

### Proposição 1.15 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Então

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_E \|y\|_E,$$

para quaisquer  $x, y \in E$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes.



*Demonstração.* Veja ((BOTELHO; PELLEGRINO; TEXEIRA, 2015), Proposição 5.1.2). □

### Definição 1.16

Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ . O conjunto resolvente de  $\mathcal{A}$  é definido por

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : X \rightarrow X \in \mathcal{L}(X, X)\}$$

e o espectro de  $\mathcal{A}$  é dado por

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}),$$

formado por três subconjuntos distintos

- (i) o espectro pontual  $\sigma_p(\mathcal{A})$ : o conjunto de seus autovalores, i.e., o conjunto formado pelos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $\lambda I - \mathcal{A}$  não é injetivo;
- (ii) o espectro contínuo  $\sigma_c(\mathcal{A})$ : o conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $\lambda I - \mathcal{A}$  é um operador injetivo, tem imagem densa em  $X$ , mas  $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \rightarrow X$  é ilimitado;
- (iii) o espectro residual  $\sigma_r(\mathcal{A})$ : o conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $\lambda I - \mathcal{A}$  é um operador injetivo mas sua imagem não é densa em  $X$ .

### Definição 1.17

Um operador linear  $T : D(T) \subset V \rightarrow W$  com domínio  $D(T)$  é fechado, se para toda sequência  $(v_n) \subset D(T)$  tal que  $v_n \rightarrow v \in V$  e  $Tv_n \rightarrow w \in W$ , tem-se  $v \in D(T)$  e  $Tv = w$ .

### Teorema 1.18

Seja  $\mathcal{A}$  um operador linear fechado em um espaço de Hilbert  $H$  tal que o operador resolvente  $(\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$  existe e é compacto para algum  $\lambda_0$ . Então o espectro  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$  é constituído apenas de autovalores de  $\mathcal{A}$  com multiplicidade finita.

*Demonstração.* Veja ((KATO, 1980), Theorem 6.29). □

## 1.2 Espaços funcionais e espaços de Sobolev

Nesta seção, definiremos os espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. De agora em diante,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , denotará um conjunto aberto e limitado.

### Definição 1.19

Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua. O suporte de  $u$ , que será denotado por  $\text{supp}(u)$  é definido como o fecho do conjunto  $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$  em  $\Omega$ . Se  $\text{supp}(u)$  for um compacto em  $\Omega$  então dizemos que  $u$  possui suporte compacto. Denotamos por  $C_0(\Omega)$  ao espaço das funções contínuas em  $\Omega$  com suporte compacto.

**Definição 1.20**

$C^m(\Omega)$  é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem  $\leq m$  contínuas em  $\Omega$  ( $m$  inteiro não-negativo ou  $m = \infty$ ). Denotaremos  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ .

**Definição 1.21**

O conjunto das funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que possuem todas as derivadas até a ordem  $m$  contínuas em  $\Omega$  e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de  $\varphi$ , é denotado por  $C_0^m(\Omega)$  (ou  $C_0^\infty$  se  $m = \infty$ ).

**Definição 1.22**

Uma sequência  $(\varphi_v)_{v \in \mathbb{N}}$  de funções de  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para zero quando existe  $K \subset \Omega$  compacto tal que:

- (i)  $\text{supp}(\varphi_v) \subset K$ , para todo  $v \in \mathbb{N}$ ;
- (ii) Para cada  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,

$$D^\alpha \varphi_v \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } K,$$

onde  $D^\alpha$  denota o operador derivação de ordem  $\alpha$  definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

**Definição 1.23**

O espaço vetorial  $C_0^\infty(\Omega)$  com a noção de convergência definida acima é representado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  é denominado espaço das funções testes em  $\Omega$ .

**Definição 1.24**

Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Denotamos por  $L^p(\Omega)$  o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em  $\Omega$  com valores reais, tais que  $|u|^p$  é integrável no sentido de Lebesgue em  $\Omega$  com norma

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para  $p = \infty$ , denotamos por  $L^\infty(\Omega)$  o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis definidas em  $\Omega$  que são essencialmente limitadas com a norma dada por

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

**Definição 1.25**

Sejam  $\Omega = (a, b)$  com  $-\infty \leq a, b \leq \infty$  e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  é definido como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists u_x \in L^p(\Omega) \text{ com } \int_a^b u \varphi_x dx = - \int_a^b u_x \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \right\}.$$

O espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left( \|u\|_{L^p}^p + \|u_x\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando  $p = 2$ , denotamos  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ . O espaço  $H^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u_x, v_x \rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u_x v_x) dx.$$

### Proposição 1.26

O espaço  $W^{1,p}(\Omega)$  é reflexivo para  $1 < p < \infty$  e separável para  $1 \leq p < \infty$ .

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Proposition 8.1). □

### Definição 1.27

Dado um inteiro  $m \geq 2$  e um número real  $1 \leq p \leq \infty$  definimos, por recorrência, o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega); D^1 u \in W^{m-1,p}(\Omega)\},$$

com a notação  $D^1 u = u_x$ , equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^m \|D^i u\|_{L^p}.$$

E também definimos

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^m \langle D^i u, D^i v \rangle_{L^2} = \int_a^b uv dx + \sum_{i=1}^m \int_a^b D^i u D^i v dx.$$

Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Para  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  é definido como o espaço das funções  $u \in L^p(\Omega)$  cujas derivadas distribucionais até a ordem  $m$  também estão em  $L^p(\Omega)$ . É bem conhecido, ver (BREZIS, 2010) que  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach separável, reflexivo e uniformemente convexo com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e  $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ . Quando  $p = 2$ , usualmente denotamos  $W^{m,p}(\Omega)$  por  $H^m(\Omega)$ , e este é um espaço de Hilbert com o produto interno correspondente.

A seguir estão mais alguns resultados, dentre eles os de imersões, que são muito importantes.  
po

**Teorema 1.28**

Existe uma constante  $C > 0$  (que depende somente de  $|\Omega| \leq C$ ) tal que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Em outras palavras,  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$  com imersão contínua para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Além disso, se  $\Omega$  é um intervalo limitado então

(i) A imersão  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  é compacta para todo  $1 < p \leq \infty$ .

(ii) A imersão  $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  é compacta para todo  $1 \leq q < \infty$ .

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Theorem 8.8). □

**Corolário 1.29**

Suponha que  $\Omega$  seja um intervalo ilimitado e  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ . Então, para  $x \in \Omega$ , tem-se que

$$\lim_{\substack{x \in \Omega \\ |x| \rightarrow \infty}} u(x) = 0.$$

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Corollary 8.9). □

**Corolário 1.30**

Sejam  $u, v \in W^{1,p}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então

$$uv \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad (uv)_x = u_x v + u v_x.$$

Ademais, vale a fórmula de integração por partes

$$\int_c^d u_x v \, dx = u(d)v(d) - u(c)v(c) - \int_c^d u v_x \, dx, \quad \forall c, d \in \overline{\Omega}.$$

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Corollary 8.10). □

**Definição 1.31**

Dado  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por  $W_0^{1,p}(\Omega)$  o fecho de  $C_0^1(\Omega)$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ , equipado com a norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

O espaço  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$  é equipado com o produto interno de  $H^1(\Omega)$ .

**Teorema 1.32**

Seja  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Então  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se, e somente se,  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ .

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Theorem 8.12). □

Uma desigualdade muito importante e que será utilizada de forma recorrente nesse texto é a desigualdade de Poincaré.

**Teorema 1.33** (Desigualdade de Poincaré)

Suponhamos  $\Omega$  um intervalo limitado. Então existe uma constante  $C_p \geq 0$ , que depende apenas do comprimento do intervalo  $\Omega$ , tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_p \|u_x\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em outras palavras, em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\|u_x\|_{L^p}$  é uma norma equivalente à norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

*Demonstração.* Veja ((BREZIS, 2010), Theorem 8.13). □

## 1.3 Semigrupos de classe $C_0$ gerados por operadores dissipativos

Nesta seção vamos descrever as notações, definições e alguns resultados sobre semigrupos de classe  $C_0$  que serão usados ao longo do trabalho.

**Definição 1.34** (Semigrupo)

Seja  $\mathcal{L}(X)$  a álgebra dos operadores lineares limitados de um espaço de Banach  $X$ . Dizemos que uma aplicação  $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  é um semigrupo de operadores limitados de  $X$ , quando:

- (i)  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade.
- (ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$ , para todo  $t, s \in \mathbb{R}^+$ .

Dizemos que o semigrupo  $S$  é de classe  $C_0$  se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Dizemos que o semigrupo  $S$  de classe  $C_0$  é limitado, se existir uma constante  $M > 0$  tal que

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall 0 \leq t \leq \infty.$$

Em particular, se  $M = 1$ , diremos que  $S$  é um semigrupo de classe  $C_0$  de contrações.

**Definição 1.35**

O operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ , definido por

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}),$$

onde  $D(\mathcal{A})$ , o domínio de  $\mathcal{A}$  é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \text{existe o limite } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \right\},$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ .

Quando  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ , denotamos  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ .

Como consequência imediata da definição anterior, temos a seguinte propriedade:

**Proposição 1.36**

O conjunto  $D(\mathcal{A})$  é um subespaço vetorial de  $X$  e  $\mathcal{A}$  é um operador linear.

Uma estimativa para o  $C_0$  semigrupo  $S(t)$  é dada pela propriedade abaixo:

**Teorema 1.37**

Existe  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ sendo } w \text{ uma constante positiva.}$$

*Demonstração.* Veja ((PAZY, 1983), Theorem 2.2). □

Como consequência imediata do teorema anterior, temos o seguinte resultado:

**Corolário 1.38**

Se  $S(t)$  é um  $C_0$  semigrupo, então para todo  $x \in X$ , temos que

$$t \mapsto S(t)x \in C^0([0, \infty); X).$$

Além disso, se  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de  $S(t)$ , então para todo  $x \in D(\mathcal{A})$ , temos que

$$t \mapsto S(t)x \in C^0([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); X).$$

*Demonstração.* Veja ((PAZY, 1983), Corollary 2.3). □

Consideremos agora a seguinte propriedade:

**Teorema 1.39**

Seja  $\mathcal{A}$  um gerador infinitesimal de um  $C_0$  semigrupo  $S(t)$ . Então

$$S(t)x \in D(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}S(t)x = \mathcal{A}S(t)x,$$

para todo  $x \in D(\mathcal{A})$ .

*Demonstração.* Veja ((PAZY, 1983), Theorem 2.4). □

**Corolário 1.40**

Seja  $\mathcal{A}$  um gerador infinitesimal de um  $C_0$  semigrupo  $S(t)$ . Então  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $X$  e  $\mathcal{A}$  é um operador linear fechado

*Demonstração.* Veja ((PAZY, 1983), Corollary 2.5). □

O próximo teorema nos fornece uma caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos  $C_0$  de contrações.

**Teorema 1.41** (Hille-Yosida)

Um operador linear  $\mathcal{A}$  sobre  $X$  é gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de contrações  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , se, e somente se,

- (i)  $\mathcal{A}$  é fechado e  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $X$ .
- (ii) existe  $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ , para todo  $\lambda > 0$  e  $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ , onde  $I$  é o operador identidade.

*Demonstração.* Veja ((PAZY, 1983), Theorem 3.1). □

A seguir, apresentamos outra caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos  $C_0$  de contrações, o teorema de Lummer-Phillips, o qual será usado com frequência nos próximos capítulos para obtermos a existência e unicidade de solução para os modelos dissipativos que iremos estudar nesse trabalho. Para isto, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Sejam  $X'$  o dual do espaço de Banach  $X$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a dualidade entre  $X$  e  $X'$ . Para cada  $x \in X$ , introduzimos o conjunto

$$J(x) = \{x^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach,  $J(x) \neq \emptyset$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 1.42**

Dizemos que o operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  é dissipativo se para todo  $x \in D(\mathcal{A})$ , existe  $x^* \in F(x)$  tal que

$$\Re \langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0,$$

onde, símbolo  $\Re$  indica a parte real.

**Teorema 1.43** (Lummer-Phillips)

Seja  $\mathcal{A}$  um operador linear com domínio  $D(\mathcal{A})$  denso no espaço de Hilbert  $X$ .

- (i) Se  $\mathcal{A}$  é dissipativo e existe  $\lambda_0 > 0$  tal que o conjunto imagem,  $R(\lambda_0 I - \mathcal{A})$ , de  $\lambda_0 I - \mathcal{A}$  é  $X$ , então  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de contrações sobre  $X$ .
- (ii) Se  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de contrações sobre  $X$  então  $\mathcal{A}$  é dissipativo e  $R(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ , para todo  $\lambda > 0$ .

*Demonstração.* Veja ((PAZY, 1983), Theorem 4.3). □

## 1.4 Estabilidade

Esta seção é relacionada com os resultados que estabelecem as condições necessárias e suficientes para a estabilidade de um  $C_0$ -semigrupo.

**Definição 1.44**

Um semigrupo  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$  é exponencialmente estável se existem constantes  $\alpha > 0$  e  $M \geq 1$  tais que

$$\|e^{\mathcal{A}t}\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

O próximo resultado, devido a J. Prüss, caracteriza a estabilidade exponencial de um semigrupo  $C_0$  de contrações.

**Teorema 1.45**

Seja  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$  um semigrupo de classe  $C_0$  de contrações sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então  $S(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty.$$

*Demonstração.* Veja ((PRÜSS, 1984), Corollary 5). □

Para semigrupos que não decaem exponencialmente, podemos analisar o decaimento polinomial com normas não uniformes.

**Definição 1.46**

Um semigrupo  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$  é polinomialmente estável se existem constantes  $C > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que

$$\|e^{\mathcal{A}t}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\gamma} \|u\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall u \in D(\mathcal{A}).$$

Vamos introduzir a seguinte notação:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| = O(|\lambda|^\alpha)$$

significa que o crescimento de  $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$  é da ordem  $|\lambda|^\alpha$ , ou em outras palavras

$$\frac{1}{|\lambda|^\alpha} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\| \leq C\|F\|, \quad \forall F \in R(i\lambda I - \mathcal{A}).$$

O próximo resultado, de A. Borichev e Y. Tomilov, caracteriza a estabilidade polinomial de semigrupos  $C_0$  limitados sobre espaços de Hilbert.

**Teorema 1.47**

Seja  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$  um semigrupo  $C_0$  limitado sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tal que  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ . Então, para  $\alpha > 0$  fixado, as seguintes condições são equivalentes:

$$(i) \quad \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| = O(|\lambda|^\alpha), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

$$(ii) \quad \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\| = O\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Veja ((BORICHEV; TOMILOV, 2010), Theorem 2.4). □



## Capítulo 2

# Equação de ondas com retardo e pesos não constantes

### 2.1 Introdução

Neste capítulo provamos a existência de solução global e a estabilidade exponencial de energia para uma equação de ondas com retardo e pesos não constantes dada por

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \mu_1(t)u_t(x, t) + \mu_2(t)u_t(x, t - \tau(t)) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

com condições de fronteira dadas por

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(x, -s\tau(0)) &= u_2(x, s), \quad (x, s) \in \Omega \times (0, 1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $\Omega = ]0, L[$  é um intervalo aberto da reta  $\mathbb{R}$ .  $u_t(x, t)$  representa o atrito,  $\mu_1(t)$  representa um peso variável no tempo,  $u_t(x, t - \tau(t))$  representa um controle sobre o atrito com peso  $\mu_2(t)$  variável no tempo conhecido como retardo, que no problema proposto está sob a ação de uma função  $\tau(t)$  real. Os dados iniciais  $(u_0, u_1, u_2)$  pertencem a adequados espaços funcionais.

Esta abordagem com pesos e retardo variando no tempo, generaliza os resultados encontrados na literatura. Para ter uma compreensão da importância deste resultado, apresentamos a seguir uma revisão bibliográfica com ênfase na evolução histórica e nos aspectos matemáticos recentes. No caso de coeficientes de atrito e de retardo constantes  $\mu_1$  e  $\mu_2$  respectivamente, destacamos o pioneiro trabalho de S. Nicaise e C. Pignotti ([NICAISE; PIGNOTTI, 2006](#)). Sob pressupostos adequados, os autores provaram a estabilidade exponencial da solução introduzindo energias apropriadas e usando algumas desigualdades de observabilidade. Resultados de instabilidade também foram fornecidos para o caso de algumas suposições não serem satisfeitas.

W. Liu (LIU, 2013) estudou a equação viscoelástica fraca com um termo de atraso interno e variável no tempo. Ao introduzir a energia e o funcional de Lyapunov, o autor estabeleceu uma estimativa geral da taxa de decaimento para a energia sob adequadas hipóteses.

A. Benaissa, A. Benguessoum e S. Messaoudi (BENAÏSSA; BENGUESSOUM; MESSAOUDI, 2014) consideraram os pesos, tanto no atrito quanto no retardo  $\mu_1(t)$  e  $\mu_2(t)$  em função do tempo. Cabe destacar que os autores levaram em conta o tempo de atraso como uma constante. Para este problema, a existência de solução foi feita pelo método de Faedo-Galerkin e a estimativa da taxa de decaimento para a energia foi dada usando o método direto de multiplicadores.

Os três trabalhos acima citados foram fonte de inspiração para os resultados obtidos neste capítulo. Vejamos a seguir outros trabalhos relacionados, os quais evidenciam a importância do tema.

F. Tahamtani e A. Peyravi (TAHAMTANI; PEYRAVI, 2013) investigaram a equação de onda viscoelástica não linear com termo fonte. Os autores utilizaram a teoria do Potencial para mostrar que assumindo determinadas restrições nos dados iniciais e para energia inicial arbitrária, as soluções do problema explodem em tempo finito. Já no artigo dos autores M. Remil e A. Hakem (REMIL; HAKEM, 2017) estudaram a equação de onda viscoelástica com um termo de atraso constante. Para a prova da existência global das soluções, eles utilizaram o método de Faedo-Galerkin. Em segundo lugar, o método do multiplicador é usado para estabelecer uma estimativa de decaimento para a energia. Já para uma equação de onda viscoelástica acoplada com atraso variável no tempo, F. Z. Benyoub et.al. (BENYOUB; FERHAT; HAKEM, 2018) combinaram o procedimento de Faedo-Galerkin com o método da energia para estudarem a existência global das soluções e o comportamento assintótico das soluções.

Podemos citar outros trabalhos muito relevantes, em que foram estudados sistemas considerando um retardo, sob ação de uma função real. S. Nicaise e C. Pignotti (NICAISE; PIGNOTTI, 2011) que estudaram o problema da estabilização por amortecimento interior da equação de onda com limite ou retardo variável no tempo interno, e M. Ferhat (FERHAT, 2016) que estudou o decaimento de energia das soluções para a equação de onda com um termo de retardo variável no tempo nas realimentações internas fracamente não lineares.

Para problemas com retardo em diferentes contextos, citamos (FENG; YANG, 2017; FENG, 2018; THAN; WANG, 2019; YANG; WANG, 2019) como referências. Na ausência do retardo, ou seja,  $\mu_2(t) = 0$ , o problema (2.1) é exponencialmente estável desde que  $\mu_1(t)$  seja constante, veja por exemplo (CHEN, 1979; CHEN, 1981; KOMORNIK, 1994; LASIECKA; TRIGGIANI, 1987; NAKAO, 1977) e suas referências.

O retardo variando no tempo é a propriedade de um sistema físico pelo qual a resposta a uma força aplicada é retardada em seu efeito e a questão central é que a fonte de atrasos pode desestabilizar um sistema que é assintoticamente estável na ausência de retardos, veja (DATKO; LAGNESE; POLIS, 1986a). De fato, um retardo arbitrariamente pequeno pode desestabilizar um sistema que é uniformemente assintoticamente estável na ausência deste, a menos que termos de

controle adicionais forem usados, veja por exemplo (DATKO, 1988; GUESMIA, 2013; XU; YUNG; LI, 2006).

Outros trabalhos relevantes e que valem a pena serem citados foram, por exemplo, o de S. Nicaise e C. Pignotti (NICAISE; PIGNOTTI, 2008), onde, utilizando o método da energia, os autores estudando a estabilização da equação com fronteira ou atraso interno distribuído. Já C. Raposo et al. (RAPOSO et al., 2017a), utilizaram a teoria de semigrupos par provar tanto a solução global quando a estabilidade exponencial para uma equação de onda com amortecimento friccional e condição de retado não local. Por fim, o problema de transmissão com retardo distribuído foi estudado em (LIU, 2017), onde foi estabelecida a estabilidade exponencial da solução através da introdução de um funcional de Lyapunov adequado.

Motivado pelos trabalhos citados anteriormente, consideramos uma equação de onda com retardo e pesos não constantes, portanto, neste capítulo faremos uma generalização dos trabalhos anteriores. A parte restante deste capítulo está organizada da seguinte forma. Na Seção 2.2 introduzimos algumas notações e provamos a propriedade dissipativa da energia total do sistema. Na Seção 2.3, para uma abordagem combinando teoria de semigrupos (veja (NAKAO, 1977) e (H, 1973)) com o método de estimativa de energia provamos a existência e unicidade da solução. Por fim, na Seção 2.4 apresentamos o resultado da estabilidade exponencial.

## 2.2 Notações e preliminares

Vamos precisar das seguintes hipóteses:

**(H1)** A função de retardo  $\tau = \tau(t)$ , satisfaz

$$\tau \in W^{2,\infty}([0, T]), \quad \forall T > 0. \quad (2.4)$$

Existem constantes positivas  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  e  $d$ , satisfazendo

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \quad \forall t > 0 \quad (2.5)$$

e

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall t > 0; \quad (2.6)$$

**(H2)**  $\mu_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow ]0, +\infty[$  é uma função não crescente de classe  $C^1(\mathbb{R}_+)$  satisfazendo

$$\left| \frac{\mu_1'(t)}{\mu_1(t)} \right| \leq M_1, \quad 0 < \alpha_0 \leq \mu_1(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.7)$$

onde  $\alpha_0$  e  $M_1$  são constantes tais que  $M_1 > 0$ .

**(H3)**  $\mu_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1(\mathbb{R}_+)$ , que não é necessariamente positiva ou monótona, de tal forma que

$$|\mu_2(t)| \leq \beta \mu_1(t), \quad (2.8)$$

$$|\mu'_2(t)| \leq M_2 \mu_1(t), \quad (2.9)$$

para algum  $0 < \beta < \sqrt{1-d}$  e  $M_2 > 0$ .

Enunciaremos agora um lemas que serão necessários mais tarde.

**Lema 2.1** (Desigualdade de Sobolev-Poincaré)

Seja  $q$  um número real com  $2 \leq q \leq +\infty$ . Então existe uma constante  $c_* = c_*(]0, L[, q)$  tal que

$$\|\Psi\|_q \leq c_* \|\Psi_x\|_2, \quad \text{para } \Psi \in H_0^1(]0, L[).$$

**Lema 2.2** ((HARAUX, 1985; KOMORNIK, 1994))

Seja  $E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função não crescente e assuma que exista duas constantes  $\sigma > -1$  e  $\omega > 0$  tais que

$$\int_S^{+\infty} E^{1+\sigma}(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E^\sigma(0) E(S), \quad \text{se } 0 \leq S < +\infty.$$

Então

$$\begin{aligned} E(t) &= 0 \quad \forall t \geq \frac{E^\sigma(0)}{\omega|\sigma|}, \quad \text{se } -1 < \sigma < 0, \\ E(t) &\leq E(0) \left( \frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \quad \forall t \geq 0, \quad \text{se } \sigma > 0, \\ E(t) &\leq E(0) e^{1-\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad \text{se } \sigma = 0. \end{aligned}$$

Consideremos agora o seguinte procedimento que pode ser encontrado em (NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011), para obter uma nova variável (independente)

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau(t)\rho), \quad x \in \Omega, \rho \in ]0, 1[, t > 0. \quad (2.10)$$

Então, facilmente se verifica que  $z$  satisfaz

$$\tau(t)z_t(x, \rho, t) + (1 - \tau'(t)\rho)z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad x \in \Omega, \rho \in ]0, 1[, t > 0$$

e o problema (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \mu_1(t)u_t(x, t) + \mu_2(t)z(x, 1, t) &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau(t)z_t(x, \rho, t) + (1 - \tau'(t)\rho)z_\rho(x, \rho, t) &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (2.11)$$

sujeito as condições de fronteira dadas por

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.12)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega, \\ z(x, \rho, 0) &= u_2(x, \rho) \quad \text{em } \Omega \times (0, 1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Definimos o funcional de energia relacionado à solução do problema (2.11)-(2.13) por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx, \quad (2.14)$$

onde

$$\xi(t) = \bar{\xi} \mu_1(t) \quad (2.15)$$

é uma função não crescente de classe  $C^1(\mathbb{R}_+)$  e  $\bar{\xi}$  é uma constante positiva tal que

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-d}} < \bar{\xi} < 2 - \frac{\beta}{\sqrt{1-d}}. \quad (2.16)$$

Nosso primeiro resultado afirma que a energia é uma função não crescente.

### Lema 2.3

Seja  $U(t) = (u(t), u_t(t), z(t))$  uma solução do problema (2.11)-(2.13). Então, o funcional de energia definido por (2.14) satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq -\mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \mu_1(t) \left( \frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} - \frac{\beta\sqrt{1-d}}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

*Demonstração.* Multiplicando (2.11)<sub>1</sub> por  $u_t(x, t)$ , integrando sobre  $\Omega$  e usando integração por partes, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \mu_1(t) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t dx. \quad (2.18)$$

Agora multiplicando (2.11)<sub>2</sub> por  $\xi(t)z(x, \rho, t)$  e integrando sobre  $\Omega \times ]0, 1[$ , obtemos

$$\tau(t)\xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z_t(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx = -\frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 (1 - \tau'(t)\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} (z(x, \rho, t))^2 d\rho dx.$$

Consequentemente, como

$$(1 - \tau'(t)\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( (1 - \tau'(t)\rho) z^2(x, \rho) \right) + \tau'(t) z^2(x, \rho),$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) &= \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} (z^2(x, 0, t) - z^2(x, 1, t)) dx \\ &\quad + \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\ &\quad + \frac{\xi'(t)\tau(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por (2.14), (2.18) e (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{\xi(t)}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\xi(t)}{2} \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\xi'(t)\tau(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ &\quad - \mu_1(t) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \mu_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Utilizando a desigualdade de Young, temos que

$$\mu_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1, t) u_t dx \leq \frac{|\mu_2(t)|}{2\sqrt{1-d}} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\mu_2(t)|\sqrt{1-d}}{2} \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq - \left( \mu_1(t) - \frac{\xi(t)}{2} - \frac{|\mu_2(t)|}{2\sqrt{1-d}} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \left( \frac{\xi(t)}{2} - \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} - \frac{|\mu_2(t)|\sqrt{1-d}}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\xi'(t)\tau(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ &\leq -\mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \mu_1(t) \left( \frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} - \frac{\beta\sqrt{1-d}}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

#### Lema 2.4

Seja  $U(t) = (u(t), u_t(t), z(t))$  uma solução do problema (2.11)–(2.13). Então o funcional de energia definido por (2.14) satisfaz

$$\|u_t(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 < -\frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} E(t),$$

onde  $\sigma = a_0 \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right)$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 2.3, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} E(t) &\geq \mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \mu_1(t) \left( \frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} + \frac{\beta\sqrt{1-d}}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por (H1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_0 \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq -\frac{d}{dt} E(t) \end{aligned}$$

e assim provamos o Lema.

□

## 2.3 Solução global

Para a configuração do semigrupo, introduzimos  $U(t) = (u(t), v(t), z(t))^T$ , onde  $v = u_t$ . Assim, reescrevemos (2.11)-(2.13) como

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}(t)U, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, u_2)^T, \end{cases} \quad (2.22)$$

onde o operador  $\mathcal{A}(t)$  é definido por

$$\mathcal{A}(t)U = \left( v, u_{xx} - \mu_1(t)v - \mu_2(t)z(x, 1, t), -\frac{1 - \tau'(t)\rho}{\tau(t)}z_\rho(x, \rho, t) \right)^T. \quad (2.23)$$

Introduzimos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times ]0, 1[)$$

e o domínio de  $\mathcal{A}(t)$  é definido por

$$D(\mathcal{A}(t)) = \{(u, v, z)^T \in H / v = z(\cdot, 0) \text{ em } \Omega\}, \quad (2.24)$$

onde

$$H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_0^1([0, 1])).$$

Note que o domínio do operador  $\mathcal{A}(t)$  é independente do tempo  $t$ , i.e.,

$$D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}(0)), \quad \forall t > 0. \quad (2.25)$$

$\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert equipado com o seguinte produto interno

$$\langle U, \bar{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} u_x \bar{u}_x dx + \int_{\Omega} v \bar{v} dx + \xi(t)\tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z \bar{z} d\rho dx, \quad (2.26)$$

para  $U = (u, v, z)^T$  e  $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})^T$ .

Uma teoria geral para equações do tipo (2.22) foi desenvolvida usando a teoria de semigrupos (KATO, 1967), (KATO, 1985) e (PAZY, 1983). A maneira mais simples de provar existência e unicidade resulta em mostrar que a terna  $\{(\mathcal{A}, \mathcal{H}, Y)\}$ , com  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t) / t \in [0, T]\}$ , para alguns  $T > 0$  fixos e  $Y = \mathcal{A}(0)$ , forma um sistema de domínio constante (veja (KATO, 1967) e (KATO, 1985)). Mais precisamente, o próximo teorema, que foi introduzido por Tosio Kato (veja Theorem 1.9 em (KATO, 1967), Theorem 2.13 em (KATO, 1985) ou (MEHMETI, 1972)) nos fornece o seguinte resultado de existência e unicidade:

### Teorema 2.5

Assuma que

- (i)  $Y = D(\mathcal{A}(0))$  é um subconjunto denso de  $\mathcal{H}$ ;

- (ii)  $D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}(0)), \forall t > 0$ ;
- (iii) Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{A}(t)$  gera um semigrupo fortemente contínuo sobre  $\mathcal{H}$  e a família  $\mathcal{A}(t) = \{\mathcal{A}(t) / t \in [0, T]\}$  é estável com estabilidade constante  $C$  e  $m$  independente de  $t$  (i.e., o semigrupo  $(S_t(s))_{s \geq 0}$  gerado por  $\mathcal{A}(t)$  satisfaz  $\|S_t(s)u\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{ms}\|u\|_{\mathcal{H}}$ , para todo  $u \in \mathcal{H}$  e  $s \geq 0$ );
- (iv)  $\partial_t \mathcal{A}(t)$  pertence a  $L_*^\infty([0, T], B(Y, \mathcal{H}))$ , que é o espaço de classes de funções equivalentes essencialmente limitadas e fortemente mensuráveis de  $[0, T]$  para o conjunto  $B(Y, \mathcal{H})$  de operadores limitados de  $Y$  para  $\mathcal{H}$ .

Então o problema (2.22) tem uma única solução

$$U \in C([0, T], Y) \cap C^1([0, T], \mathcal{H}),$$

para qualquer dado inicial em  $Y$ .

Desta forma, estamos prontos para enunciar e provar o principal resultado desta seção, que é:

**Teorema 2.6** (Solução global)

Para qualquer dado inicial  $U_0 \in \mathcal{H}$  existe uma única solução  $U$  satisfazendo

$$U \in C([0, +\infty[, \mathcal{H})$$

para o problema (2.22). Além disso, se  $U_0 \in D(\mathcal{A}(0))$ , então

$$U \in C([0, +\infty[, D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0, +\infty[, \mathcal{H}).$$

*Demonstração.* Nosso objetivo é então verificar as suposições do Teorema 2.5 para o problema (2.22).

(i) Primeiramente provaremos que  $D(\mathcal{A}(0))$  é denso em  $\mathcal{H}$ .

A prova é a mesma do Lema 2.2 de (NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011). Nós a faremos por uma questão de completude.

Seja  $(f, g, h)^T$  ortogonal a todos os elementos de  $D(\mathcal{A}(0))$ , a saber

$$0 = \langle (u, v, z)^T, (f, g, h)^T \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} u_x f_x dx + \int_{\Omega} v g dx + \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z h d\rho dx,$$

para todo  $(u, v, z)^T \in D(\mathcal{A}(0))$ .

Primeiro tomamos  $u = v = 0$  e  $z \in \mathcal{D}(\Omega \times ]0, 1])$ . Como  $(0, 0, z)^T \in D(\mathcal{A}(0))$ , temos que

$$\int_{\Omega} \int_0^1 z h d\rho dx = 0.$$

Como  $\mathcal{D}(\Omega \times ]0, 1])$  é denso em  $L^2(\Omega \times ]0, 1])$ , deduzimos que  $h = 0$ . Da mesma forma, tomando  $u = z = 0$  e  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , vemos que  $g = 0$ .



A condição de ortogonalidade acima é então reduzida para

$$0 = \int_{\Omega} u_x f_x dx, \quad \forall (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A}(0)).$$

Restringindo-nos a  $v = z = 0$ , obtemos

$$0 = \int_{\Omega} u_x f_x dx, \quad \forall (u, 0, 0)^T \in D(\mathcal{A}(0)).$$

Verifica-se imediatamente que  $(u, 0, 0)^T \in D(\mathcal{A}(0))$  se, e somente se,  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e como  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  é denso em  $H_0^1(\Omega)$  (equipado com o produto interno  $\langle \varphi, \psi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi_x \psi_x dx$ ), deduzimos que  $f = 0$ .

Consequentemente,

$$D(\mathcal{A}(0)) \text{ é denso em } \mathcal{H}. \quad (2.27)$$

(ii) Foi observado em (2.25).

(iii) Agora, mostramos que o operador  $\mathcal{A}(t)$  gera um  $C_0$ -semigrupo em  $\mathcal{H}$  para um  $t$  fixo. Definimos o produto interno dependente do tempo em  $\mathcal{H}$ , (que é equivalente ao produto interno (2.26)), dado por

$$\langle U, \bar{U} \rangle_t = \int_{\Omega} u_x \bar{u}_x dx + \int_{\Omega} v \bar{v} dx + \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z \bar{z} d\rho dx, \quad (2.28)$$

para qualquer  $U = (u, v, z)^T$  e  $\bar{U} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})^T$  em  $\mathbb{H}$ , onde

$$\xi(t) = \bar{\xi} \mu_1(t) \quad (2.29)$$

e  $\bar{\xi}$  é uma constante positiva tal que

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-d}} < \bar{\xi} < 2 - \frac{\beta}{\sqrt{1-d}}. \quad (2.30)$$

Calcularemos  $\langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t$  para um  $t$  fixado. Tomando  $U = (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A}(t))$ , então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t &= \int_{\Omega} v_x u_x dx + \int_{\Omega} (u_{xx} - \mu_1(t)v - \mu_2(t)z(\cdot, 1)) v dx \\ &\quad - \xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 (1 - \tau'(t)\rho) z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t &= -\mu_1(t) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \mu_2(t) \int_{\Omega} z(\cdot, 1) v dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_0^1 (1 - \tau'(t)\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned}$$

Sendo

$$(1 - \tau'(t)\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} ((1 - \tau'(t)\rho) z^2(x, \rho)) + \tau'(t) z^2(x, \rho),$$

temos que

$$\int_0^1 (1 - \tau'(t)\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) d\rho = (1 - \tau'(t)) z^2(x, 1) - z^2(x, 0) + \tau'(t) \int_0^1 z^2(x, \rho) d\rho.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t &= -\mu_1(t) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \mu_2(t) \int_{\Omega} z(x, 1) v dx + \frac{\xi(t)}{2} \|z(x, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \frac{\xi(t)(1 - \tau'(t))}{2} \|z(x, 1)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned}$$

Portanto, por (2.20) e (2.21), deduzimos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t &\leq -\mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \mu_1(t) \left( \frac{\bar{\xi}(1 - \tau'(t))}{2} - \frac{\beta\sqrt{1-d}}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\xi(t)|\tau'(t)|}{2\tau(t)} \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned}$$

Por (H3) e (2.29), temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t &\leq -\mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{1-d}} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \mu_1(t) \left( \frac{\bar{\xi}(1 - \tau'(t))}{2} - \frac{\beta\sqrt{1-d}}{2} \right) \|z(x, 1, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \kappa(t) \langle U, U \rangle_t, \end{aligned}$$

onde

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1 + \tau'(t)^2}}{2\tau(t)}.$$

Por (2.17), obtemos

$$\langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t - \kappa(t) \langle U, U \rangle_t \leq 0, \quad (2.31)$$

o que significa que o operador  $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(t) - \kappa(t)I$  é dissipativo (nos próximos passos usaremos  $\tilde{\mathcal{A}}$  como um pivô para então recuperar as propriedades pretendidas de  $\mathcal{A}$ ).

Agora, mostremos que o operador  $\lambda I - \mathcal{A}(t)$  é sobrejetivo para  $t > 0$  fixado e  $\lambda > 0$ . Para este fim, seja  $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$ , buscamos  $U = (u, v, z)^T \in D(\mathcal{A}(t))$  solução de

$$(\lambda I - \mathcal{A}(t))U = F,$$

que está verificando o seguinte sistema de equações

$$\lambda u - v = f_1, \quad (2.32)$$

$$\lambda v - u_{xx} + \mu_1(t)v + \mu_2(t)z(x, 1) = f_2, \quad (2.33)$$

$$\lambda z + \frac{1 - \tau'(t)\rho}{\tau(t)} z_{\rho} = f_3. \quad (2.34)$$

Suponha que encontramos  $u$  com a regularidade apropriada. Portanto, de (2.32), temos que

$$v = \lambda u - f_1. \quad (2.35)$$

É claro que  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Além disso, por (2.34), podemos encontrar  $z$ . Seguindo a mesma abordagem de (NICAISE; PIGNOTTI, 2006), obtemos que

$$z(x, \rho) = v(x)e^{-\vartheta(\rho, t)} + \tau(t)e^{-\vartheta(\rho, t)} \int_0^\rho f_3(x, s)e^{\vartheta(s, t)} ds$$

é solução de (2.34), se  $\tau'(t) = 0$ , onde  $\vartheta(\ell, t) = \lambda \ell \tau(t)$ , e

$$z(x, \rho) = v(x)e^{\zeta(\rho, t)} + e^{\zeta(\rho, t)} \int_0^\rho \frac{\tau(t)f_3(x, s)}{1 - s\tau'(s)} e^{-\zeta(s, t)} ds,$$

é solução de (2.34), caso contrário, onde  $\zeta(\ell, t) = \lambda \frac{\tau(t)}{\tau'(t)} \ln(1 - \ell \tau'(t))$ , sendo que ambas as soluções satisfazem

$$z(x, 0) = v(x), \text{ para } x \in \Omega. \quad (2.36)$$

Por (2.35), obtemos

$$z(x, \rho) = \lambda u(x)e^{-\vartheta(\rho, t)} - f_1(x, \rho)e^{-\vartheta(\rho, t)} + \tau(t)e^{-\vartheta(\rho, t)} \int_0^\rho f_3(x, s)e^{\vartheta(s, t)} ds, \quad (2.37)$$

se  $\tau'(t) = 0$ , e

$$z(x, \rho) = \lambda u(x)e^{\zeta(\rho, t)} - f_1(x, \rho)e^{\zeta(\rho, t)} + e^{\zeta(\rho, t)} \int_0^\rho \frac{\tau(t)f_3(x, s)}{1 - s\tau'(s)} e^{-\zeta(s, t)} ds, \quad (2.38)$$

caso contrário.

Em particular, se  $\tau'(t) = 0$  e por (2.37), temos que

$$z(x, 1) = \lambda u(x)e^{-\vartheta(1, t)} - f_1(x, 1)e^{-\vartheta(1, t)} + \tau(t)e^{-\vartheta(1, t)} \int_0^1 f_3(x, s)e^{\vartheta(s, t)} ds, \quad (2.39)$$

e se  $\tau'(t) \neq 0$  e por (2.38), temos que

$$z(x, 1) = \lambda u(x)e^{\zeta(1, t)} - f_1(x, 1)e^{\zeta(1, t)} + e^{\zeta(1, t)} \int_0^1 \frac{\tau(t)f_3(x, s)}{1 - s\tau'(s)} e^{-\zeta(s, t)} ds. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.35) e  $z(x, 1)$  em (2.33), obtemos

$$\alpha u - u_{xx} = g, \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &:= \lambda^2 + \lambda \mu_1(t) + \lambda \mu_2(t) N_1, \\ g &:= f_2 + \lambda f_1 + \mu_1(t) f_1 + \mu_2(t) N_2, \\ N_1 &:= \begin{cases} e^{-\vartheta(1, t)}, & \text{se } \tau'(t) = 0, \\ e^{\zeta(1, t)}, & \text{se } \tau'(t) \neq 0, \end{cases} \\ N_2 &:= \begin{cases} -f_1(x, 1)e^{-\vartheta(1, t)} + \tau(t)e^{-\vartheta(1, t)} \int_0^1 f_3(x, s)e^{\vartheta(s, t)} ds, & \text{se } \tau'(t) = 0, \\ -f_1(x, 1)e^{\zeta(1, t)} + e^{\zeta(1, t)} \int_0^1 \frac{\tau(t)f_3(x, s)}{1 - s\tau'(s)} e^{-\zeta(s, t)} ds, & \text{se } \tau'(t) \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Resolver a equação (2.41) é equivalente a encontrar  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \alpha u \tilde{u} + u_x \tilde{u}_x = \int_{\Omega} g \tilde{u} dx, \quad (2.43)$$

para todo  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ .

Consequentemente, a equação (2.43) é equivalente ao problema

$$\Upsilon(u, \tilde{u}) = L(\tilde{u}), \quad (2.44)$$

onde a forma bilinear

$$\Upsilon : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

e a forma linear

$$L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

são definidas por

$$\Upsilon(u, \tilde{u}) = \alpha \int_{\Omega} u \tilde{u} dx + \int_{\Omega} u_x \tilde{u}_x dx \quad \text{e} \quad L(\tilde{u}) = \int_{\Omega} g \tilde{u}_x dx.$$

Facilmente verificamos que  $\Upsilon$  é contínua e coerciva, e  $L$  é contínua. Daí, aplicando o Teorema de Lax-Milgram, deduzimos que, para todo  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ , o problema (2.44) admite única solução

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

Aplicando a regularidade elíptica clássica, segue de (2.43) que

$$u \in H^2(\Omega).$$

Portanto, o operador  $\lambda I - \mathcal{A}(t)$  é sobrejetivo para todo  $\lambda > 0$  e  $t > 0$ . Daí, como  $\kappa(t) > 0$ , isso prova que

$$\lambda I - \tilde{\mathcal{A}}(t) = (\lambda + \kappa(t)) I - \mathcal{A}(t) \text{ é sobrejetiva,} \quad (2.45)$$

para todo  $\lambda > 0$  e  $t > 0$ .

Para completar a prova de (iii), é suficiente mostrar que

$$\frac{\|\Phi\|_t}{\|\Phi\|_s} \leq e^{\frac{c}{2\tau_0}|t-s|}, \quad \forall t, s \in [0, T], \quad (2.46)$$

onde  $\Phi = (u, v, z)^T$ ,  $c$  é uma constante positiva e  $\|\cdot\|_t$  é a norma associada ao produto interno (2.28).

Para todo  $t, s \in [0, T]$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_t^2 - \|\Phi\|_s^2 e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} &= \left(1 - e^{\frac{c}{2\tau_0}|t-s|}\right) \left(\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &\quad + \left(\xi(t)\tau(t) - \xi(s)\tau(s)e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|}\right) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \end{aligned}$$

É claro que  $1 - e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \leq 0$ . Agora, vamos provar que  $\xi(t)\tau(t) - \xi(s)\tau(s)e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \leq 0$  para algum  $c > 0$ .

Para isso, de (2.4) e pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\tau(t) = \tau(s) + \tau'(r)(t-s),$$

para algum  $r \in ]s, t[$ . Como  $\xi$  é uma função não crescente e  $\xi > 0$ , segue que

$$\xi(t)\tau(t) \leq \xi(s)\tau(s) + \xi(s)\tau'(r)(t-s),$$

o que implica

$$\frac{\xi(t)\tau(t)}{\xi(s)\tau(s)} \leq 1 + \frac{|\tau'(r)|}{\tau(s)}|t-s|.$$

Usando (2.4) e o fato que  $\tau'$  é limitado, deduzimos que

$$\frac{\xi(t)\tau(t)}{\xi(s)\tau(s)} \leq 1 + \frac{c}{\tau_0}|t-s| \leq e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|},$$

o que prova (2.46) e, portanto, (iii) segue.

(iv) Note que, por (H1), temos que

$$\kappa'(t) = \frac{\tau'(t)\tau''(t)}{2\tau(t)\sqrt{1+\tau'(t)^2}} - \frac{\tau'(t)\sqrt{1+\tau'(t)^2}}{2\tau(t)^2}$$

é limitado em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ . Além disso,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t)U = \left(0, \mu'_1(t) - \mu'_2(t)z(x, 1, t), \frac{\tau''(t)\tau(t)\rho - \tau'(t)(\tau'(t)\rho - 1)}{\tau(t)^2}z_\rho\right)^T,$$

com  $\frac{\tau''(t)\tau(t)\rho - \tau'(t)(\tau'(t)\rho - 1)}{\tau(t)^2}$  limitado sobre  $[0, T]$  por (H1), e considerando (H2) e (H3), temos que

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{A}}(t) \in L_*^\infty([0, T], B(D(\mathcal{A}(0)), \mathcal{H})), \quad (2.47)$$

onde  $L_*^\infty([0, T], B(D(\mathcal{A}(0)), \mathcal{H}))$  é o espaço das classes de equivalência de funções essencialmente limitadas e fortemente mensuráveis de  $[0, T]$  para  $B(D(\mathcal{A}(0)), \mathcal{H})$ .

Então (2.31), (2.45) e (2.46) implicam que a família  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\mathcal{A}}(t) / t \in [0, T]\}$  é uma família de geradores estáveis em  $\mathcal{H}$  com constantes de estabilidade independentes de  $t$ , pela Proposição 1.1 em (KATO, 1967). Portanto, as afirmações (i) – (iv) do Teorema 2.5 são verificadas por (2.25), (2.27), (2.46), (2.31), (2.47) e (2.45), e assim, o problema

$$\begin{cases} \tilde{U}_t = \tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{U}, \\ \tilde{U}(0) = U_0 = (u_0, u_1, f_0(\cdot, -, \tau(0)))^T \end{cases} \quad (2.48)$$

tem única solução  $\tilde{U} \in C([0, +\infty[, D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0, +\infty[, \mathcal{H})$  para  $U_0 \in D(\mathcal{A}(0))$ . A solução pedida de (2.22) é então dada por

$$U(t) = e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}(t),$$

pois

$$\begin{aligned} U_t(t) &= \kappa(t)e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}(t) + e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}_t(t) \\ &= e^{\int_0^t \kappa(s) ds} (\kappa(t) + \tilde{\mathcal{A}}(t)) \tilde{U}(t) \\ &= \mathcal{A}(t)e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}(t) \\ &= \mathcal{A}(t)U(t), \end{aligned}$$

o que conclui a prova.  $\square$

## 2.4 Comportamento assintótico

Nesta seção vamos investigar o comportamento assintótico do problema (2.1). O resultado da estabilidade será obtido usando o Lema 2.2.

**Teorema 2.7** (Decaimento exponencial)

Seja  $(u_0, u_1, f_0(\cdot, -, \tau(0))) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times ]0, 1])$ . Assumindo que as hipóteses (H1), (H2) e (2.4)-(2.6) são válidas. Então o problema (2.1) admite única solução

$$u \in C([0, +\infty[, H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty[, L^2(\Omega)),$$

$$z \in C([0, +\infty[, L^2(\Omega) \times ]0, 1]).$$

Além disso, para constantes positivas  $c$  e  $\alpha$ , obtemos a seguinte propriedade de decaimento:

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

*Demonstração.* De agora em diante, denotamos por  $c$  várias constantes positivas que podem ser diferentes em diferentes ocorrências.

Dado  $0 \leq S < T < \infty$ , começamos multiplicando a primeira equação de (2.11) por  $uE^q$  e então integrando sobre  $(S, T) \times \Omega$ , obtemos

$$\int_S^T E^q \int_{\Omega} u (u_{tt} - u_{xx} + \mu_1(t)u_t + \mu_2(t)z(x, 1, t)) dx dt = 0.$$

Note que

$$u_{tt}u = (u_t u)_t - u_t^2.$$

Daí, usando integração por partes e as condições de fronteira, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ E^q(t) \int_{\Omega} uu_t dx \right]_S^T - \int_S^T qE^{q-1}(t)E'(t) \int_{\Omega} uu_t dx dt \\ &\quad - \int_S^T E^q(t) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_S^T E^q(t) \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \mu_1(t)uu_t dx dt + \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \mu_2(t)uz(x, 1, t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Analogamente, multiplicando a segunda equação de (2.11) por  $E^q \xi(t) e^{-2\rho\tau(t)} z(x, \rho, t)$  e então integrando sobre  $\Omega \times (0, 1) \times (S, T)$ , vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} \int_0^1 E^q(t) \xi(t) e^{-2\rho\tau(t)} z(x, \rho, t) (\tau(t)z_t(x, \rho, t) + (1 - \rho\tau'(t))z_{\rho}(x, \rho, t)) d\rho dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_S^T E^q(t) \xi(t) e^{-2\rho\tau(t)} \frac{\partial}{\partial t} z^2(x, \rho, t) dt d\rho dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_S^T E^q(t) \xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} (1 - \rho\tau'(t)) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt. \end{aligned}$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira, segue que

$$\begin{aligned}
0 = & \left[ \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} E^q(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right]_S^T \\
& - \frac{1}{2} \int_S^T q E^{q-1}(t) E'(t) \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt \\
& - \frac{1}{2} \int_S^T q E^q(t) \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_S^T E^q(t) \xi(t) \int_{\Omega} [e^{-2\rho\tau(t)} (1 - \tau'(t)) z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)] dx dt \\
& + \int_S^T E^q(t) \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Como  $\mu_1$  é uma função não crescente de classe  $C_1(\mathbb{R})$ , sua derivada é não positiva, o que implica que  $\xi'(t) \leq 0$ . Então temos o seguinte resultado

$$\int_S^T q E^q(t) \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt \leq 0. \tag{2.51}$$

Além disso, como

$$-\frac{1}{2} \int_S^T E^q(t) \xi(t) \int_{\Omega} e^{-2\rho\tau(t)} (1 - \tau'(t)) z^2(x, 1, t) dx dt \leq 0, \tag{2.52}$$

então, por (2.50), (2.51) e (2.52), temos que

$$\begin{aligned}
& \int_S^T E^q(t) \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt \\
& \leq - \left[ \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} E^q(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right]_S^T \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_S^T q E^{q-1}(t) E'(t) \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2 d\rho dx dt \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_S^T E^q(t) \xi(t) \int_{\Omega} z^2(x, 0, t) dx dt.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Usando a definição do funcional de energia (2.14), (2.49) e (2.53), segue que

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \int_S^T E^{q+1} dt \leq & - \left[ E^q(t) \int_{\Omega} uu_t dx \right]_S^T - \left[ \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} E^q(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right]_S^T \\
& + q \int_S^T E^{q-1}(t) E'(t) \int_{\Omega} uu_t dx dt \\
& + q \int_S^T \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} E^{q-1}(t) E'(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt \\
& + 2 \int_S^T E^q(t) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \mu_1(t) uu_t dx dt \\
& - \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \mu_2(t) uz(x, 1, t) dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_S^T \xi(t) E^q(t) e^{-2\rho\tau(t)} \int_{\Omega} z^2(x, 0, t) dx dt,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

onde  $\gamma_0 = 2 \min\{1, e^{-2\tau_1}\}$ .

Usando as desigualdades de Young e Sobolev-Poincaré, e o Lema 2.3, obtemos que

$$\begin{aligned} - \left[ E^q(t) \int_{\Omega} u u_t dx \right]_S^T &\leq E^q(S) \int_{\Omega} u(x, S) u_t(x, S) dx - E^q(T) \int_{\Omega} u(x, T) u_t(x, T) dx \\ &\leq c E^{q+1}(S). \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} E^q(t) \int_{\Omega} \int_0^1 d\rho dx e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right]_S^T &\leq \frac{\xi(S)\tau(S)}{2} E^q(S) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(S)} z^2(x, \rho, S) \\ &\leq c E^q(S) \xi(S) \tau(S) \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, S) d\rho dx \\ &\leq c E^{q+1}(S). \end{aligned}$$

Por (2.17), temos que

$$\int_S^T E^{q-1}(t) E'(t) \int_{\Omega} u u_t dx dt \leq c \int_S^T (-E'(t)) E^q(t) dt \leq c E^{q+1}(S).$$

Analogamente,

$$\int_S^T E^{q-1}(t) E'(t) \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} z^2(x, \rho, t) d\rho dx dt \leq c E^{q+1}(S).$$

Pelo Lema 2.4, deduzimos que

$$\int_S^T E^q(t) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq -c \int_S^T E^q(t) E'(t) dt \leq c E^{q+1}(S).$$

Agora, obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \mu_1(t) u u_t dx dt \right| &\leq \mu_1(0) \left| \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} u u_t dx dt \right| \\ &\leq c(\varepsilon_1) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} u_t^2 dx dt + \varepsilon_1 \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} u_x^2 dx dt \\ &\leq c(\varepsilon_1) \int_S^T E^q(t) (-E'(t)) dt + \varepsilon_1 \int_S^T E^q(t) E(t) dt \\ &\leq c(\varepsilon_1) E^{q+1}(S) + \varepsilon_1 \int_S^T E^{q+1}(t) dt \end{aligned} \tag{2.55}$$

e por (H2), segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \mu_2(t) u z(x, 1, t) dx dt \right| &\leq \beta \mu_1(0) \left| \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \varphi z(x, 1, t) dx dt \right| \\ &\leq c(\varepsilon_2) E^{q+1}(S) + \varepsilon_2 \int_S^T E^{q+1}(t) dt. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T E^q(t) \xi(t) \int_{\Omega} z^2(x, 0, t) dx dt &\leq \frac{\bar{\xi} \mu_1(0)}{2} \int_S^T E^q(t) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq c \int_S^T E^q(t) (-E'(t)) dt \leq c E^{q+1}(S). \end{aligned}$$



Escolhendo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  suficientemente pequeno, deduzimos de (2.55) e (2.56) que

$$\int_S^T E^{q+1} dt \leq \frac{1}{\gamma} E^{q+1}(S).$$

Como  $E(S) \leq E(0)$  para  $S \geq 0$ , temos que

$$\int_S^T E^{q+1} dt \leq \frac{1}{\gamma} E(0) E^q(S).$$

Escolhendo  $q = 0$ , concluímos do Lema 2.2 que

$$E(t) \leq E(0) e^{1-\gamma t}.$$

Isso encerra a prova do teorema. □



## Capítulo 3

# Estabilização de solos elásticos porosos inchados com saturação de fluido, retardo e pesos não constantes

### 3.1 Introdução

Materiais porosos consistem em uma estrutura composta por um ou mais componentes sólidos capazes de fornecer uma resposta mensurável em macroescala, dependendo das interações de diferentes fases e estruturas em microescala. Por esta razão, várias teorias de como o comportamento macroscópico emerge das interações microscópicas para modelar e quantificar a resposta do material.

Teorias distintas que descrevem a física de sistemas multicomponentes são estudados por uma linha de pesquisa chamada teoria da mistura. A teoria da mistura pode ser usada para modelar uma ampla gama de diferentes materiais porosos. A figura abaixo ilustra processo de inchamento, onde as camadas de argila preenchidas por cátions metálicos entram em contato com moléculas de água, promovendo inchaço da estrutura.. Portanto, é interessante buscar abordagens e diferentes métodos para descrever a cinemática e as leis do equilíbrio, podemos citar os trabalhos de R.J. Atkin e R.E. Craine (ATKIN; CRAINE, 1976), A. Bedford e D. Drumheller (BEDFORD; DRUMHELLER, 1983) e V. Klika (KLIKA, 2013).

A.C. Eringen (ERINGEN, 1994) usou a teoria da mistura para modelar o problema do inchamento do solo, mais precisamente, ele considerou o sistema dado por

$$\begin{aligned} \rho_0^f \ddot{\mathbf{u}}^f + \sigma^{ff} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f + \sigma^f \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^s + (\alpha^f + \gamma^f) \nabla T + \xi^{ff} (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) - \rho_0^f \mathbf{f}^f &= 0, \\ \rho_0^s \ddot{\mathbf{u}}^s + \sigma^f \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f - (\gamma^f - \alpha_0) \nabla T - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^s - \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^s - \xi^{ff} (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) - \rho_0^s \mathbf{f}^s &= 0, \\ \alpha_1 \dot{\mathbf{T}} + \left( \alpha^f + \xi^f / T_0 \right) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^f + \left( \alpha_0 - \xi^f / T_0 \right) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^s - \frac{K}{T_0} \nabla^2 \mathbf{T} - \frac{\rho_0 \mathbf{h}}{T_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os sobrescritos  $f$  e  $s$  denotam o fluido e o sólido elástico, respectivamente. Consequentemente,

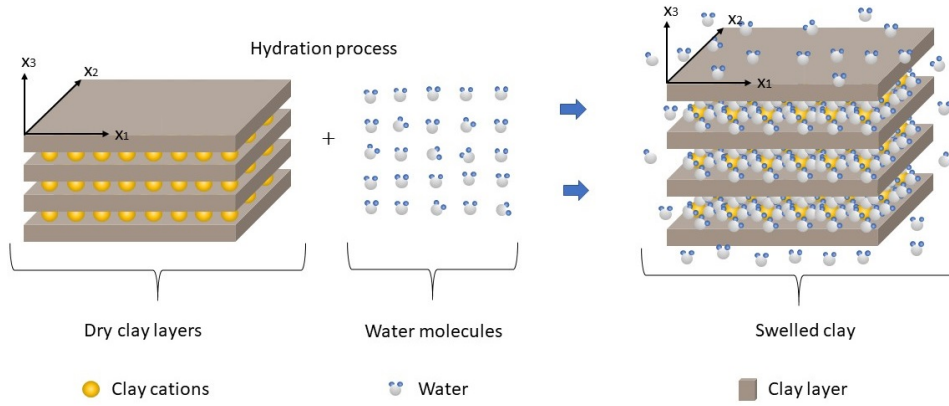


Figura 1 – O processo de inchamento da argila. Crédito para P. T. P. Aum.

$\mathbf{u}^f$  e  $\mathbf{u}^s$  representam os deslocamentos do fluido e do material sólido respectivamente e  $\mathbf{T}$  é a mudança de temperatura para uma temperatura ambiente  $T_0$ . As funções  $\mathbf{f}^f$ ,  $\mathbf{f}^s$  e  $\mathbf{h}$  representam as forças externas,  $\rho_0^f$  e  $\rho_0^s$  são as densidades de cada constituinte,  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\sigma^f < 0$ ,  $\sigma^{ff} < 0$  e  $\xi^{ff} > 0$  são as constantes constitutivas,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha^f > 0$ ,  $\zeta^f > 0$  e  $\gamma^f > 0$  são as constantes do material e  $K$  a constante de condutividade térmica. É importante considerar a relação  $K/T_0 \geq 0$  e  $K\xi^{ff}/T_0 \geq (\gamma^f + \xi^f/T_0)^2/4$ .

O estudo do comportamento de solos argilosos em expansão é de suma importância em muitos aspectos da vida cotidiana, pois são responsáveis por muitas reações e processos. Por exemplo, as argilas compactadas desempenham um papel importante na prevenção do movimento da água através de buracos e rachaduras. No contexto da produção de petróleo e gás, as lamelas de perfuração desempenham um papel importante (KARABOMI et al., 1996; WILCOX, 1990). Segundo W. Wray (WRAY, 1995), a expansão das argilas também desempenha um papel crítico na construção de fundações, pontes e rodovias, pois os solos expansivos variam em volume conforme o teor de umidade aumenta ou diminui. Desta forma, um modelo preciso, capaz de prever o inchamento de argilas será de grande utilidade na engenharia e ciência do solo. Com base no importante trabalho de A.C. Eringen (ERINGEN, 1994), muitos autores (QUINTANILLA, 2002a; WANG; GUO, 2006; QUINTANILLA, 2002b; QUINTANILLA, 2004; BOFILL; QUINTANILLA, 2003) estudaram o comportamento de problemas relacionados ao inchamento do solo. Por exemplo, R. Quintanilla considerou o sistema unidimensional na teoria isotérmica linear de solos elásticos porosos inchados dado por

$$\begin{aligned} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi(z_t - u_t) - \mu_z z_{xxt} &= 0, \\ \rho_u u_{tt} - \mu u_{xx} - a_2 z_{xx} - \xi(z_t - u_t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde as variáveis dependentes  $z = z(x, t)$  e  $u = u(x, t)$  representam o deslocamento do fluido e do material sólido elástico, respectivamente. As constantes  $\rho_z$  e  $\rho_u$  são as densidades de cada constituinte e as constantes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $\mu$  representam as constantes constitutivas da teoria e eles satisfazem  $a_2^2 \leq a_1 \mu$ . Nesse trabalho, o autor provou a estabilidade exponencial usando o método da energia e mostrou que os termos dissipativos  $\pm \xi(z_t - u_t)$  e  $\mu_z z_{xxt}$ , com  $\xi > 0$  e  $\mu_z > 0$  são suficientes para estabelecer o resultado. Por outro lado, J-M. Wang e B-Z. Guo (WANG; GUO, 2006) consideraram um problema de inchamento dos solos elásticos porosos unidimensionais com amortecimento na

equação do deslocamento do fluido

$$\begin{aligned}\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} - \rho_z \gamma(x) z_t &= 0, \\ \rho_u u_{tt} - \mu u_{xx} - a_2 z_{xx} &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

e provou que o sistema é exponencialmente estável usando o método espectral.

Recentemente, A. Ramos et al. (RAMOS et al., 2020) consideraram o sistema fracamente dissipativo

$$\begin{aligned}\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} &= 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \gamma(t)g(u_t) &= 0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

com amortecimento não linear. Eles estabeleceram uma taxa de decaimento exponencial, usando um método multiplicador e algumas propriedades de funções convexas sem impor nenhuma suposição restritiva de crescimento próximo à origem no termo de amortecimento, desde que as velocidades de onda do sistema sejam iguais.

Na modelagem de problemas envolvendo inchamento de solos argilosos, é de extrema importância ter uma descrição adequada do comportamento microscópico da água absorvida (água entre as plaquetas). Sabemos que o processo de consolidação geralmente envolve duas etapas, que são as diferentes taxas de compressão, a primária e a secundária. Na fase primária, a pressão da fase de volume é gradualmente transferida para o esforço efetivo, enquanto na compressão secundária ocorre uma deformação contínua depois que a água em massa é substancialmente drenada. Sendo assim, ambos podem ocorrer simultaneamente.

Devido a fatores intrínsecos que caracterizam o comportamento viscoso à fluência da estrutura argilosa no estágio secundário, ainda não há um entendimento completo dos mecanismos subjacentes a este fenômeno. No entanto, A. Sridharan e G.V. Rao (SRIDHARAN; RAO, 1982) sugeriram que a compressão secundária está relacionada à deformação retardada da partícula de argila após a água bruta ser drenada dos poros na estrutura primária (T. Hueckel (HUECKEL, 1992)). Esta deformação secundária surge devido ao atraso na drenagem da água absorvida em relação ao fluxo da fase de massa. Desta forma, é natural que queiramos estudar o comportamento dos sistemas de dilatação do solo considerando os efeitos do atraso no deslocamento do fluido.

Em trabalho recente, A. Ramos et al. (RAMOS et al., 2021), consideraram o problema de inchamento em solos elásticos porosos com saturação de fluido, amortecimento viscoso e um retardo com tempo de atraso constante, dado por

$$\begin{aligned}\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi_1 z_t + \xi_2 z_t(x, t - \tau) &= 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} &= 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Eles estudaram a solução global do problema com base na teoria dos semigrupos e mostraram que a energia associada ao sistema é dissipativa e estabeleceram a estabilidade do sistema exponencialmente. No contexto de modelos que consistem em equações diferenciais parciais, quando inserimos

termos de retroalimentação de atraso em modelos estáveis, eles podem se tornar instáveis (DATKO; LAGNESE; POLIS, 1986b; DATKO, 1988; NICAISE; PIGNOTTI, 2006). Portanto, para esses tipos de modelos (formados por equações diferenciais parciais) devemos ter o cuidado de analisar cada caso. Vejamos a seguir, alguns trabalhos relacionados, importantes por si só e que enriquecem a teoria.

S. Nicaise et al. em (NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011), estudaram a seguinte equação de onda com atraso variável no tempo de limite

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_D \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\mu_1 u_t - \mu_2 u_t(x, t - \tau(t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_t(x, t - \tau(0)) &= f_0(x, t - \tau(0)) \quad \text{em} \quad \Gamma_N \times (0, \tau(0)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é domínio limitado e suave,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são constantes positivas,  $\nu(x)$  representam o vetor normal da unidade externa ao ponto  $x \in \Gamma$  e  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  é a derivada normal,  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  é o limite de  $\Omega$ . No trabalho, considerou-se

$$\tau \in W^{2,\infty}([0, T]), \quad \forall T > 0, \quad (3.7)$$

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \quad \forall t > 0, \quad (3.8)$$

para algumas constantes  $\tau_0$  e  $\bar{\tau}$  e existe  $d > 0$  tal que

$$\mu_2 < \sqrt{1 - d} \mu_1 \quad (3.9)$$

com

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall t > 0. \quad (3.10)$$

Com essas suposições, os autores mostraram que o sistema é exponencialmente estável.

M. Kirane et al. em (KIRANE; SAID-HOUARI; ANWAR, 2011), consideraram o seguinte modelo de viga Timoshenko unidimensional com retardo variável  $\tau(t)$  na equação do ângulo de rotação

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \psi_t + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau(t)) &= 0 \quad \text{em} \quad (0, 1) \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\kappa$  e  $b$  são constantes positivas relacionadas às propriedades físicas do feixe, a função de atraso  $\tau(t)$  satisfaz (3.7), (3.8) e (3.10). Os autores mostraram que se (3.9) e  $\rho_1/\kappa = \rho_2/b$  forem válidos, então o sistema é exponencialmente estável.

A. Benaissa et al. em (BENAÏSSA; BENGUESSOUM; MESSAOUDI, 2014) consideraram a seguinte equação de onda com retardo e pesos de amortecimento dependendo do tempo

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \mu_1(t)u_t + \mu_2(t)u_t(x, t - \tau) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_t(x, t - \tau(0)) &= f_0(x, t - \tau(0)) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \tau(0)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com limite  $\Gamma$ . Ao contrário de trabalhos anteriores, os amortecimentos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dependem do tempo  $t$ , porém, o tempo de retardo  $\tau$  é constante. Sob suposições apropriadas sobre os pesos do amortecimento  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , os autores obtiveram o decaimento exponencial da energia do sistema. Já V. Barros et al. em (BARROS; NONATO; RAPOSO, 2020) estudaram o problema (3.12) com  $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$  e  $\tau = \tau(t)$  a função dependente do tempo  $t$ . Sob premissas apropriadas para  $\mu_1(t)$  e  $\mu_2(t)$  e considerando (3.7), (3.8) e (3.10) os autores mostraram que a energia do sistema decai exponencialmente. Nossa intenção ao citar os três últimos trabalhos foi mostrar situações em que o feedback de atraso dependente do tempo aparece  $\tau = \tau(t)$  bem como mostrar situações em que o peso do amortecimento pode variar, o que torna o problema mais complicado, sem dúvidas, mais atraente e desafiador. Existem inúmeros estudos sobre a estabilidade exponencial de sistemas lineares considerando o caso em que o atraso é constante (APALARA, 2016; FENG; PELICER, 2017; KIRANE; SAID-HOUARI, 2011; NICAISE; PIGNOTTI, 2006; NICAISE; PIGNOTTI, 2011; RAPOSO; APALARA; RIBEIRO, 2018; RAPOSO et al., 2013; SAID-HOUARI; LASKRI, 2010; XU; YUNG; LI, 2006). Existem também vários estudos considerando modelos não lineares com atraso onde a existência de atratores é investigada, entre eles, sistemas de Timoshenko (SANTOS et al., 2020; FENG; YANG, 2017; RAMOS et al., 2019; YANG; ZHANG; LU, 2021), sistemas poroelásticos (SANTOS et al., 1920) e ponte suspensa (PARK, 2018; WANG; MA, 2019). Com base no trabalho mencionado acima sobre o problema de inchamento dos solos elásticos porosos unidimensionais e nas referências (BARROS; NONATO; RAPOSO, 2020; NONATO; SANTOS; RAPOSO, 2022; NONATO; RAPOSO; FENG, 2022), projetamos e propomos estudar a estabilidade exponencial para o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \mu_1(t) z_t + \mu_2(t) z_t(x, t - \tau(t)) &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.13)$$

com condições de fronteira dadas por

$$z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.14)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, L), \\ z_t(x, -s\tau(0)) &= z_2(x, s), \quad (x, s) \in (0, L) \times (0, 1), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $z_0, z_1, z_2, u_0, u_1$  são funções conhecidas pertencentes a espaços funcionais apropriados. Em (3.13), estamos admitindo que o retardo está sendo considerado no deslocamento do fluido, isso nos parece muito natural, pois segundo A. Sridharan e G.V. Rao (SRIDHARAN; RAO, 1982), a compressão da deformação secundária ocorre de alguma forma devido ao atraso na drenagem da água absorvida em relação ao fluxo da fase do volume. Neste trabalho, obtemos o resultado do decaimento exponencial sem impor uma condição às velocidades de onda  $a_1/\rho_z = a_2/\rho_u$  do sistema. Este é um resultado surpreendente e inesperado em comparação com o sistema Timoshenko, sistemas elásticos porosos e outros sistemas com amortecimentos semelhantes.

A parte restante deste capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 3.2, estipulamos as hipóteses para as funções presentes em (3.13) bem como, através de uma mudança de variável,

obteremos um sistema equivalente a (3.13). Na Seção 3.3, usando a teoria de semigrupo de operadores lineares encontrada em (KATO, 2011), a questão da existência, unicidade e regularidade da solução será abordada. Por fim, na Seção 3.4, obteremos o principal resultado deste trabalho, que é a prova do decaimento exponencial para o sistema (3.13).

## 3.2 Preliminares

Vamos considerar as seguintes hipóteses:

(A1) A função de retardo  $\tau = \tau(t)$ , satisfaz

$$\tau \in W^{2,\infty}([0, T]), \quad \forall T > 0. \quad (3.16)$$

Existem constantes positivas  $\tau_0, \tau_1$  e  $d$ , satisfazendo

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \quad \forall t > 0 \quad (3.17)$$

e

$$\tau'(t) \leq d < 1, \quad \forall t > 0; \quad (3.18)$$

(A2)  $\mu_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, +\infty)$  é uma função não crescente da classe  $C^1(\mathbb{R}_+)$ . Além disso, existem constantes  $\mu_0$  e  $M_1 > 0$ , tais que

$$\left| \frac{\mu_1'(t)}{\mu_1(t)} \right| \leq M_1, \quad 0 < \mu_0 < \mu_1(t), \quad \forall t \geq 0; \quad (3.19)$$

(A3)  $\mu_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1(\mathbb{R}_+)$ , o que não é necessariamente positiva ou monótona. Além disso, existem constantes  $M_2 > 0$  e  $\delta$ , com  $0 < \delta < \sqrt{1-d}$ , tais que

$$|\mu_2(t)| \leq \delta \mu_1(t) \quad (3.20)$$

e

$$|\mu_2'(t)| \leq M_2 \mu_1(t). \quad (3.21)$$

Como foi feito em (NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011), introduzimos uma nova variável (independente) dada por

$$\eta(x, y, t) = z_t(x, t - \tau(t)y), \quad (x, y, t) \in (0, L) \times (0, 1) \times (0, \infty). \quad (3.22)$$

Verifica-se facilmente que  $z$  satisfaz

$$\tau(t)\eta_t(x, y, t) + (1 - \tau'(t)y)\eta_y(x, y, t) = 0. \quad (3.23)$$



Portanto, usando (3.22) e (3.23) podemos reescrever (3.13) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \mu_1(t) z_t + \mu_2(t) \eta(x, 1, t) &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \tau(t) \eta_t + (1 - \tau'(t) y) \eta_y &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, 1) \times (0, \infty),\end{aligned}\tag{3.24}$$

sujeito a condições de fronteira dadas por

$$z(0, t) = u(0, t) = z_x(L, t) = u_x(L, t) = 0\tag{3.25}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned}z(x, 0) &= z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } (0, L), \\ \eta(x, y, 0) &= z_2(x, y) \quad \text{em } (0, L) \times (0, 1).\end{aligned}\tag{3.26}$$

### 3.3 Solução global

Nesta seção, usando a teoria de semigrupos de operadores lineares encontrada em (KATO, 2011), um resultado de existência, unicidade e regularidade será obtido para o problema (3.24)–(3.26). Procedimentos semelhantes são encontrados no capítulo anterior ou em diversos trabalhos, como (KIRANE; SAID-HOUARI; ANWAR, 2011; LIU; CHEN, 2017; NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011).

Em primeiro lugar, considere os seguintes espaços

$$H_*(0, L) = \{\varphi : \varphi \in H^1(0, L), \varphi(0) = 0\}\tag{3.27}$$

e

$$\mathcal{H} = H_*(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2((0, L) \times (0, 1)).\tag{3.28}$$

Definimos em  $\mathcal{H}$  o seguinte produto interno

$$\begin{aligned}\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= \rho_z \int_0^L w \tilde{w} dx + \rho_u \int_0^L v \tilde{v} dx + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L z_x \tilde{z}_x dx \\ &+ \int_0^L \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \tilde{z}_x + \sqrt{a_3} \tilde{u}_x \right) dx + \int_0^L \int_0^1 \eta \tilde{\eta} dy dx,\end{aligned}\tag{3.29}$$

para qualquer  $U = (z, w, u, v, \eta)$ ,  $\tilde{U} = (\tilde{z}, \tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})$  em  $\mathcal{H}$ , onde  $w = z_t$  e  $v = u_t$ .

Introduzindo  $U(t) = (z(t), w(t), u(t), v(t), \eta(t))^T$  e  $U_0 = (z_0, z_1, u_0, u_1, z_2)^T$ , o sistema (3.24)–(3.26) pode ser escrito como o seguinte problema abstrato de valor inicial em  $\mathcal{H}$

$$\begin{cases} U_t(t) &= \mathcal{A}(t)U(t), \quad t > 0, \\ U(0) &= U_0, \end{cases}\tag{3.30}$$

onde o operador  $\mathcal{A}(t) : D(\mathcal{A}(t)) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathcal{A}(t) \begin{pmatrix} z \\ w \\ u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \rho_z^{-1}(a_1 z_{xx} + a_2 u_{xx} - \mu_1(t)w - \mu_2(t)\eta(\cdot, 1)) \\ v \\ \rho_u^{-1}(a_3 u_{xx} + a_2 z_{xx}) \\ -\frac{1-\tau'(t)y}{\tau(t)}\eta_y \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

com

$$D(\mathcal{A}(t)) = \left\{ (z, w, u, v, \eta) \in \mathcal{H}, z, u \in H^2(0, L) \cap H_*(0, L), w, v \in H_*(0, L), z_x(L) = u_x(L) = 0, \right. \\ \left. \eta \in L^2(0, 1; H_0^1(0, L)), \eta(\cdot, 0) = w \right\}. \quad (3.32)$$

Note que  $D(\mathcal{A}(t))$  é independente de  $t$ , isto é,

$$D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}(0)), \quad \forall t > 0. \quad (3.33)$$

Como foi feito no capítulo anterior, usaremos o teorema introduzido por Tosio Kato para obter o resultado de existência e unicidade:

### Teorema 3.1

Assuma que

- (i)  $Y = D(\mathcal{A}(0))$  é denso em  $\mathcal{H}$ ;
- (ii)  $D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}(0)), \forall t > 0$ ;
- (iii) Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{A}(t)$  gera um semigrupo fortemente contínuo em  $\mathcal{H}$  e a família  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t); t \in [0, T]\}$  é estável com estabilidade constantes  $C$  e  $m$  independentes de  $t$  (ou seja, o semigrupo  $(S_t(s))_{s \geq 0}$  gerado por  $\mathcal{A}(t)$  satisfaz  $\|S_t(s)W\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{ms}\|W\|_{\mathcal{H}}$ , para todo  $W \in \mathcal{H}$  e  $s \geq 0$ );
- (iv)  $\partial_t \mathcal{A}(t)$  pertence a  $L_*^\infty([0, T], B(Y, \mathcal{H}))$ , que é o espaço das equivalente classes de funções essencialmente limitadas e fortemente mensuráveis de  $[0, T]$  para o conjunto  $B(Y, \mathcal{H})$  de operadores limitados de  $Y$  para  $\mathcal{H}$ .

Então o problema (3.30) tem uma única solução

$$U \in C([0, T]; Y) \cap C^1([0, T]; \mathcal{H}), \quad (3.34)$$

para qualquer dado inicial em  $Y$ .

Desta forma, estamos prontos para enunciar e provar o principal resultado desta seção, que é:

### Teorema 3.2 (Solução global)

Para qualquer  $U_0 \in D(\mathcal{A}(0))$ , existe uma única solução  $U$  de (3.30) que satisfaz

$$U \in C([0, +\infty); D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}). \quad (3.35)$$

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\mathcal{A}(t)$  atende às condições do Teorema 3.1. Na verdade,

(i) Essa condição pode ser comprovada usando argumentos análogos feitos no capítulo anterior ou aos encontrados em (KIRANE; SAID-HOUARI; ANWAR, 2011; LIU; CHEN, 2017; NICAISE; PIGNOTTI, 2011; NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011).

(ii) Foi observado em (3.33).

(iii) Para mostrar que o operador  $\mathcal{A}(t)$  gera um semigrupo  $C_0$  em  $\mathcal{H}$ , dado  $t$ , introduzimos o produto interno dependente do tempo em  $\mathcal{H}$  (este produto interno é equivalente a (3.29))

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_t = & \rho_z \int_0^L w \tilde{w} dx + \rho_u \int_0^L v \tilde{v} dx + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L z_x \tilde{z}_x dx \\ & + \int_0^L \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \tilde{z}_x + \sqrt{a_3} \tilde{u}_x \right) dx + \xi(t) \tau(t) \int_0^L \int_0^1 \eta \tilde{\eta} dy dx, \end{aligned} \quad (3.36)$$

para qualquer  $U = (z, w, u, v, \eta)$ ,  $\tilde{U} = (\tilde{z}, \tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})$  em  $\mathcal{H}$ , onde

$$\xi(t) = \bar{\xi} \mu_1(t) \quad (3.37)$$

e  $\bar{\xi}$  é uma constante positiva tal que

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-d}} < \bar{\xi} < 2 - \frac{\delta}{\sqrt{1-d}}. \quad (3.38)$$

Note que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t = & -\mu_1(t) \int_0^L w^2 dx - \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1) w dx \\ & - \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 (1 - \tau'(t)y) \frac{\partial}{\partial y} \eta^2(x, y) dy dx, \end{aligned} \quad (3.39)$$

para qualquer  $U = (z, w, u, v, \eta)^T \in D(\mathcal{A}(t))$ . Como

$$(1 - \tau'(t)y) \frac{\partial}{\partial y} \eta^2 = \frac{\partial}{\partial y} ((1 - \tau'(t)y) \eta^2) + \tau'(t) \eta^2, \quad (3.40)$$

por (3.39) e (3.40), temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t = & -\mu_1(t) \int_0^L w^2 dx - \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1) w dx + \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L w^2 dx \\ & - \frac{\xi(t)(1 - \tau'(t))}{2} \int_0^L \eta^2(x, 1) dx - \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 \eta^2 dy dx. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young ao segundo termo do lado direito de (3.41), obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t \leq & \left( \mu_1(t) - \frac{\xi(t)}{2} - \frac{|\mu_2(t)|}{2\sqrt{1-d}} \right) \int_0^L w^2 dx \\ & - \left( \frac{\xi(t)}{2} - \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} - \frac{|\mu_2(t)|\sqrt{1-d}}{2} \right) \int_0^L \eta^2(x, 1) dx \\ & + \frac{\xi(t)|\tau'(t)|}{2\tau(t)} \tau(t) \int_0^L \int_0^1 \eta^2 dy dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por (A3) e (3.37), segue que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t &\leq -\mu_1(t) \left( 1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{1-d}} \right) \int_0^L w^2 dx \\ &\quad - \mu_1(t) \left( \frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} - \frac{\delta\sqrt{1-d}}{2} \right) \int_0^L \eta^2(x, 1) dx \\ &\quad + \kappa(t) \langle U, U \rangle_t, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1+\tau'(t)^2}}{2\tau(t)}. \quad (3.44)$$

Por (3.17), (3.18) e (3.38), temos que

$$1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{1-d}} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} - \frac{\delta\sqrt{1-d}}{2} > 0. \quad (3.45)$$

Portanto, concluímos que

$$\langle \mathcal{A}(t)U, U \rangle_t - \kappa(t) \langle U, U \rangle_t \leq 0, \quad (3.46)$$

o que significa que o operador  $\widetilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(t) - \kappa(t)I$  é dissipativo (nos próximos passos usaremos  $\widetilde{\mathcal{A}}$  como um pivô para então recuperar as propriedades pretendidas de  $\mathcal{A}$ ).

Agora, vamos provar a sobrejetividade do operador  $\lambda I - \mathcal{A}(t)$ , para  $t > 0$  fixo. Para isso, dado  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$ , buscamos  $U = (z, w, u, v, \eta)^T$  em  $D(\mathcal{A}(t))$  que é solução de

$$(\lambda I - \mathcal{A}(t))U = F, \quad (3.47)$$

isto é, as entradas de  $U$  satisfazem o sistema de equações

$$\lambda z - w = f_1, \quad (3.48)$$

$$\lambda \rho_z w - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \mu_1(t)w + \mu_2(t)\eta(x, 1) = \rho_z f_2, \quad (3.49)$$

$$\lambda u - v = f_3, \quad (3.50)$$

$$\lambda \rho_u v - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} = \rho_u f_4, \quad (3.51)$$

$$\lambda \tau(t)z + (1 - \tau'(t)y)\eta_y = \tau(t)f_5. \quad (3.52)$$

Suponha que encontramos  $z, u$  com a regularidade apropriada. Portanto, de (3.48) e (3.50), temos que

$$w = \lambda z - f_1, \quad (3.53)$$

$$v = \lambda u - f_3. \quad (3.54)$$

É claro que  $w, v \in H_*(0, L)$ . Além disso, se  $\tau'(t) = 0$ , então

$$\eta(x, y) = w(x)e^{-\lambda\tau(t)y} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)y} \int_0^y f_5(x, s)e^{\lambda\tau(t)s} ds \quad (3.55)$$

é solução de (3.52) satisfazendo

$$\eta(x, 0) = w(x). \quad (3.56)$$

Por outro lado,

$$\eta(x, y) = w(x)e^{\sigma(y, t)} + \tau(t)e^{\sigma(y, t)} \int_0^y \frac{f_5(x, s)}{1 - \tau'(t)s} e^{-\sigma(s, t)} ds, \quad (3.57)$$

onde

$$\sigma(y, t) = \frac{\lambda\tau(t)}{\tau'(t)} \ln(1 - \tau'(t)y), \quad (3.58)$$

é solução de (3.52) satisfazendo (3.56). A partir de agora, para fins de praticidade, vamos considerar  $\tau'(t) = 0$  (o caso  $\tau(t) \neq 0$  é análogo), desta forma temos (levando em conta (3.53))

$$\begin{aligned} \eta(x, 1) &= we^{-\lambda\tau(t)} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)} \int_0^1 f_5(x, s)e^{\lambda\tau(t)s} ds \\ &= (\lambda z - f_1)e^{-\lambda\tau(t)} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)} \int_0^1 f_5(x, s)e^{\lambda\tau(t)s} ds \\ &= \lambda ze^{-\lambda\tau(t)} - f_1e^{-\lambda\tau(t)} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)} \int_0^1 f_5(x, s)e^{\lambda\tau(t)s} ds. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Substituindo (3.53) e (3.59) em (3.49), e (3.54) em (3.51), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha z - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} &= g_1, \\ \lambda^2 \rho_u u - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} &= g_2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &:= \lambda^2 \rho_z + \lambda \mu_1(t) + \lambda \mu_2(t)e^{-\lambda\tau(t)}, \\ g_1 &:= \rho_z f_2 + \lambda \rho_z f_1 + \mu_1(t)f_1 + \mu_2(t)f_1 e^{-\lambda\tau(t)} - \mu_2(t)\tau(t)e^{-\lambda\tau(t)} \int_0^1 f_5(x, s)e^{\lambda\tau(t)s} ds, \\ g_2 &:= \rho_u f_4 + \lambda \rho_u f_3. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para resolver (3.60), usamos um procedimento padrão, considerando a forma bilinear  $\Upsilon : ((H_*(0, L) \times H_*(0, L))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} \Upsilon((z, u), (\tilde{z}, \tilde{u})) &= \alpha \int_0^L z \tilde{z} dx + a_1 \int_0^L z_x \tilde{z}_x dx + a_2 \int_0^L u_x \tilde{z}_x dx \\ &\quad + \lambda^2 \rho_u \int_0^L u \tilde{u} dx + a_3 \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + a_2 \int_0^L z_x \tilde{u}_x dx. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Não é difícil mostrar que  $\Upsilon$  é contínuo e coercitivo, então aplicando o Teorema de Lax-Milgram, obtemos uma solução para  $(z, u) \in H_*(0, L) \times H_*(0, L)$  para (3.60). Além disso, segue de (3.49) e (3.51) que  $z, u \in H^2(0, L)$  e então  $(z, w, u, v, \eta) \in D(\mathcal{A}(t))$ .

Portanto, o operador  $\lambda I - \mathcal{A}(t)$  é sobrejetivo para todo  $t > 0$ . Como  $\kappa(t) > 0$ , temos

$$\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}(t) = (\lambda + \kappa(t))I - \mathcal{A}(t) \quad \text{é sobrejetivo} \quad \forall t > 0. \quad (3.63)$$

Para completar a prova de (iii), basta provar que

$$\frac{\|\Phi\|_t}{\|\Phi\|_s} \leq e^{\frac{c}{2\tau_0}|t-s|}, \quad \forall t, s \in [0, T], \quad (3.64)$$

onde  $\Phi = (z, w, u, v, \eta)^T$ ,  $c$  é uma constante positiva e  $\|\cdot\|_t$  é a norma associada ao produto interno (3.36). Para  $t, s \in [0, T]$ , temos

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_t^2 - \|\Phi\|_s^2 e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} &= \left(1 - e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|}\right) \int_0^L \left[ \rho_z |w|^2 + \rho_u |v|^2 + (a_1 - a_2^2/a_3) |z_x|^2 + \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 \right] dx \\ &\quad + \left( \xi(t)\tau(t) - \xi(s)\tau(s) e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \right) \int_0^L \int_0^1 |z(x, y)|^2 dy dx. \end{aligned}$$

É claro que  $1 - e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \leq 0$ . Agora vamos provar  $\xi(t)\tau(t) - \xi(s)\tau(s) e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \leq 0$  para alguns  $c > 0$ . Para fazer isso, de (3.16) e pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\tau(t) = \tau(s) + \tau'(r)(t-s), \quad (3.65)$$

para algum  $r \in (s, t)$ . Como  $\xi$  é uma função não crescente e  $\xi > 0$ , obtemos

$$\xi(t)\tau(t) \leq \xi(s)\tau(s) + \xi(s)\tau'(r)(t-s), \quad (3.66)$$

o que implica

$$\frac{\xi(t)\tau(t)}{\xi(s)\tau(s)} \leq 1 + \frac{|\tau'(r)|}{\tau(s)} |t-s|. \quad (3.67)$$

Usando (3.16) e o fato que  $\tau'$  é limitado, deduzimos que

$$\frac{\xi(t)\tau(t)}{\xi(s)\tau(s)} \leq 1 + \frac{c}{\tau_0} |t-s| \leq e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|}, \quad (3.68)$$

o que prova (3.64) e, portanto, (iii) segue.

(iv) Observe que, de (A1), temos que

$$\kappa'(t) = \frac{\tau'(t)\tau''(t)}{2\tau(t)\sqrt{1+\tau'(t)^2}} - \frac{\tau'(t)\sqrt{1+\tau'(t)^2}}{2\tau(t)^2} \quad (3.69)$$

é limitado em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ . Além disso

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(t)U = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_z^{-1} [\mu'_1(t)w + \mu'_2(t)\eta(\cdot, 1)] \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\tau''(t)\tau(t)y - \tau'(t)(\tau'(t)y - 1)}{\tau(t)^2} \eta_y \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Como  $\frac{\tau''(t)\tau(t)\rho - \tau'(t)(\tau'(t)\rho - 1)}{\tau(t)^2}$  é limitado em  $[0, T]$  por (A1), e considerando (A2) e (A3), temos

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{A}}(t) \in L_*^\infty([0, T], B(D(\mathcal{A}(0)), \mathcal{H})), \quad (3.71)$$

onde  $L_*^\infty([0, T], B(D(\mathcal{A}(0)), \mathcal{H}))$  é o espaço de classes de equivalência de funções essencialmente limitadas e fortemente mensuráveis de  $[0, T]$  para  $B(D(\mathcal{A}(0)), \mathcal{H})$ .

Então, (3.46), (3.63) e (3.64) implicam que a família  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\mathcal{A}}(t) : t \in [0, T]\}$  é uma família estável de geradores em  $\mathcal{H}$  com constantes de estabilidade independentes de  $t$ , pela Proposição 1.1 de (KATO, 2011). Portanto, as suposições (i)-(iv) do Teorema 3.1 são verificadas. Assim, o problema

$$\begin{cases} \tilde{U}_t &= \tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{U}, \\ \tilde{U}(0) &= U_0, \end{cases} \quad (3.72)$$

tem uma única solução  $\tilde{U} \in C([0, +\infty), D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H})$  para  $U_0 \in D(\mathcal{A}(0))$ . A solução pedida de (3.30) é então dada por

$$U(t) = e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}(t), \quad (3.73)$$

pois

$$\begin{aligned} U_t(t) &= \kappa(t) e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}(t) + e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}_t(t) \\ &= e^{\int_0^t \kappa(s) ds} (\kappa(t) + \tilde{\mathcal{A}}(t)) \tilde{U}(t) \\ &= \mathcal{A}(t) e^{\int_0^t \kappa(s) ds} \tilde{U}(t) \\ &= \mathcal{A}(t) U(t) \end{aligned} \quad (3.74)$$

o que conclui a prova. □

## 3.4 Estabilidade exponencial

Esta seção é dedicada ao estudo do comportamento assintótico. Mostramos que a solução do problema (3.24)–(3.26) é exponencialmente estável usando o método da energia.

Definimos a energia associada à solução  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  do problema (3.24)–(3.26) pelo seguinte funcional

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho_z |z_t|^2 + \rho_u |u_t|^2 + (a_1 - a_2^2/a_3) |z_x|^2 + \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 \right] dx \\ &\quad + \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Nosso esforço consiste em construir um funcional de Lyapunov adequado pelo método da energia. O objetivo principal desta seção é provar o seguinte resultado de estabilidade.

### Teorema 3.3

[Decaimento exponencial] Seja  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  a solução de (3.24)–(3.26) com dados iniciais  $U_0 \in D(\mathcal{A}(0))$  e  $E(t)$  a energia de  $U$ . Então existem constantes positivas  $M$  e  $\gamma$  tais que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.76)$$

Para a prova do Teorema 3.3 precisamos de vários lemas. Nosso primeiro resultado afirma que a energia é uma função não crescente e uniformemente limitada por  $E(0)$ .

**Lema 3.4**

Seja  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  a solução de (3.24)–(3.26). Então, a energia  $E(t)$  satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq -\mu_1(t) \left(1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{1-d}}\right) \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \mu_1(t) \left(\frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} - \frac{\delta\sqrt{1-d}}{2}\right) \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

*Demonstração.* Multiplicando (3.24)<sub>1</sub> por  $z_t$ , (3.24)<sub>2</sub> por  $u_t$  e integrando cada um deles por partes sobre  $[0, L]$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_z |z_t|^2 + a_1 |z_x|^2) dx + a_2 \int_0^L u_x z_{xt} dx + \mu_1(t) \int_0^L |z_t|^2 dx + \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1, t) z_t dx = 0, \quad (3.78)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_u |u_t|^2 + a_3 |u_x|^2) dx + a_2 \int_0^L z_x u_{xt} dx = 0. \quad (3.79)$$

Agora, multiplicando (3.24)<sub>3</sub> por  $\xi(t)\eta$  e integrando sobre  $[0, L] \times [0, 1]$ , obtemos

$$\frac{\tau(t)\xi(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 \frac{d}{dt} |\eta|^2 dy dx + \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 (1 - \tau'(t)y) \frac{\partial}{\partial y} |\eta|^2 dy dx = 0, \quad (3.80)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\xi(t)\tau(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx \right) &= \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L |z_t|^2 dx - \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx + \frac{\xi'(t)\tau(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Combinando (3.78), (3.79) e (3.81), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\mu_1(t) \int_0^L |z_t|^2 dx - \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1, t) z_t dx + \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L |z_t|^2 dx - \frac{\xi(t)}{2} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx + \frac{\xi'(t)\tau(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Aplicando a desigualdade de Young e levando em conta (3.38), (A2) (que resulta em  $\xi'(t) \leq 0$ ), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq -\left(\mu_1(t) - \frac{\xi(t)}{2} - \frac{|\mu_2(t)|}{2\sqrt{1-d}}\right) \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{\xi(t)}{2} - \frac{\xi(t)\tau'(t)}{2} - \frac{|\mu_2(t)|\sqrt{1-d}}{2}\right) \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{\xi'(t)\tau(t)}{2} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx \\ &\leq -\mu_1(t) \left(1 - \frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{1-d}}\right) \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \mu_1(t) \left(\frac{\bar{\xi}(1-\tau'(t))}{2} - \frac{\delta\sqrt{1-d}}{2}\right) \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$



Daí a prova está completa.  $\square$

No resultado anterior observamos que o funcional de energia restaura alguns termos do funcional da energia com sinal negativo. Estamos interessados em construir um funcional de Lyapunov que restaure a energia total do sistema com sinal negativo e, para isso, consideramos os seguintes lemas.

### Lema 3.5

Se  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  é uma solução de (3.24)–(3.26), então o funcional  $I_1$ , definido por

$$I_1(t) = \rho_z \int_0^L z_t z \, dx - \frac{a_2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t z \, dx \quad (3.84)$$

satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) \leq & -\frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 \, dx + \varepsilon_1 \int_0^L |u_t|^2 \, dx \\ & + c_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \int_0^L |z_t|^2 \, dx + c_1 \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 \, dx, \end{aligned} \quad (3.85)$$

para quaisquer constantes  $\varepsilon_1 > 0$  e  $c_1 > 0$ .

*Demonstração.* Derivando de  $I_1(t)$ , logo depois usando (3.24) e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) \leq & - (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 \, dx - \mu_1(t) \int_0^L z_t z \, dx - \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1, t) z \, dx \\ & + \rho_z \int_0^L |z_t|^2 \, dx - \frac{a_2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t z_t \, dx. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por (A2) e (A3), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) \leq & - (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 \, dx + \mu_1(t) \int_0^L |z_t z| \, dx + |\mu_2(t)| \int_0^L |\eta(x, 1, t) z| \, dx \\ & + \rho_z \int_0^L |z_t|^2 \, dx - \frac{a_2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t z_t \, dx \\ \leq & - (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 \, dx + \mu_1(0) \int_0^L |z_t z| \, dx + \delta \mu_1(0) \int_0^L |\eta(x, 1, t) z| \, dx \\ & + \rho_z \int_0^L |z_t|^2 \, dx - \frac{a_2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t z_t \, dx. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Explorando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos as estimativas (3.85) e concluímos a prova.  $\square$

### Lema 3.6

Se  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  é uma solução de (3.24)–(3.26), então o funcional  $I_2$ , definido por

$$I_2(t) = \rho_z \int_0^L z_t z \, dx + \rho_u \int_0^L u_t u \, dx \quad (3.88)$$

satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) \leq & -\frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 dx - \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx \\ & + c_2 \int_0^L |z_t|^2 dx + c_2 \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.89)$$

para alguma contante  $c_2 > 0$ .

*Demonstração.* Derivando de  $I_2(t)$ , usando (3.24) e integrando por partes, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) = & -a_1 \int_0^L |z_x|^2 dx - 2a_2 \int_0^L u_x z_x dx - a_3 \int_0^L |u_x|^2 dx \\ & + \rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx - \mu_1(t) \int_0^L z_t z dx - \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1, t) z dx. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Por (A2) e (A3), juntamente com o fato de que  $a_1 = a_1 - a_2^2/a_3 + a_2^2/a_3$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) \leq & - (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 dx - \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx \\ & + \rho_z \int_0^L |z_t|^2 dx + \mu_1(0) \int_0^L |z_t z| dx + \delta \mu_1(0) \int_0^L |\eta(x, 1, t) z| dx. \end{aligned} \quad (3.91)$$

A estimativa (3.89) segue graças às desigualdades de Young e Poincaré.  $\square$

### Lema 3.7

Se  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  é uma solução de (3.24)–(3.26), então o funcional  $I_3$ , definido por

$$I_3(t) = a_2 \rho_z \int_0^L z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx \quad (3.92)$$

satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) \leq & -\frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_3}} \int_0^L |u_t|^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx + \frac{c_3}{\varepsilon_3} \int_0^L |z_x|^2 dx \\ & + \frac{c_3}{\varepsilon_3} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx + c_3 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^L |z_t|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.93)$$

para quaisquer constantes  $\varepsilon_3 > 0$  e  $c_3 > 0$ .

**Demonstração.** Derivando o funcional  $I_3(t)$ , usando (3.24) junto com integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_3(t) &= -a_2(a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L z_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx - a_2 \mu_1(t) \int_0^L z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx \\
&\quad - a_2 \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1, t) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx + a_2 \rho_z \int_0^L z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_t + \sqrt{a_3} u_t \right) dx \\
&\quad - \frac{a_2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_t + \sqrt{a_3} u_t \right) dx \\
&= -a_2(a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L z_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx - a_2 \mu_1(t) \int_0^L z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx \\
&\quad - a_2 \mu_2(t) \int_0^L \eta(x, 1, t) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx + \frac{a_2^2 \rho_z}{\sqrt{a_3}} \int_0^L |z_t|^2 dx \\
&\quad + a_2 \sqrt{a_3} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{a_3 \sqrt{a_3}} \int_0^L u_t z_t dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_3}} \int_0^L |u_t|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Por (A2) e (A3), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_3(t) &\leq -a_2(a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L z_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx + a_2 \mu_1(0) \int_0^L \left| z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) \right| dx \\
&\quad + a_2 \delta \mu_1(0) \int_0^L \left| \eta(x, 1, t) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) \right| dx + \frac{a_2^2 \rho_z}{\sqrt{a_3}} \int_0^L |z_t|^2 dx \\
&\quad + a_2 \sqrt{a_3} \rho_z \int_0^L z_t u_t dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{a_3 \sqrt{a_3}} \int_0^L u_t z_t dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_3}} \int_0^L |u_t|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Em seguida, usamos as desigualdades de Young e Poincaré para obter (3.93).  $\square$

Como em (KIRANE; SAID-HOUARI; ANWAR, 2011), levando em conta o último lema, introduzimos o funcional

$$J(t) = \bar{\xi} \tau(t) \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau(t)y} |\eta|^2 dy dx, \quad \bar{\xi} > 0.$$

Claramente

$$J(t) \geq \frac{\xi(t)\tau(t)}{\mu_1(t)} e^{-2\tau_1} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx > \frac{\delta \tau_0}{\sqrt{1-d}} e^{-2\tau_1} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 dy dx > 0, \tag{3.96}$$

sendo (3.17), (3.37), (3.38) e (A2) válidos. Para este funcional, temos o seguinte resultado:

**Lema 3.8** ((KIRANE; SAID-HOUARI; ANWAR, 2011, Lemma 3.7))

Seja  $U(t) = (z(t), z_t(t), u(t), u_t(t), \eta(t))$  é uma solução de (3.24)–(3.26). Então o funcional  $J(t)$  satisfaz

$$\frac{d}{dt} J(t) \leq -2J(t) + \bar{\xi} \int_0^L |z_t|^2 dx. \tag{3.97}$$

Agora estamos em condições de provar nosso resultado principal.

**Prova do Teorema 3.3.** Vamos construir um funcional de Lyapunov adequado  $\mathcal{L}$  que satisfaça a seguinte relação de equivalência

$$\gamma_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \gamma_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.98}$$

para algum  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  e para provar que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\lambda \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.99)$$

para algum  $\lambda > 0$ , o que implica

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.100)$$

Vamos definir o funcional de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \sum_{i=1}^3 N_i I_i(t) + J(t), \quad (3.101)$$

onde  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são números reais positivos que serão escolhidos posteriormente. Pelo Lema 3.4, existe uma constante positiva  $K$  tal que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -K \left( \int_0^L |z_t|^2 dx + \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \right). \quad (3.102)$$

Pela definição de  $\mathcal{L}(t)$ , temos que

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \sum_{i=1}^3 N_i |I_i(t)| + \bar{\xi} \tau(t) |J(t)|. \quad (3.103)$$

Segue de (3.75), das desigualdades de Young e Poincaré e do fato de que  $\tau(t) \leq \tau_1$  para todos  $t \geq 0$  e  $e^{-2\tau(t)y} \leq 1$  para todo  $y \in (0, 1)$  que

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \gamma_3 E(t), \quad (3.104)$$

para alguma constante  $\gamma_3 > 0$ . Então, podemos escolher  $N$  grande o suficiente para que  $\gamma_1 := N - \gamma_3$  e  $\gamma_2 := N + \gamma_3$ , então

$$\gamma_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \gamma_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.105)$$

vale.

Agora, derivando  $\mathcal{L}(t)$ , substituindo as estimativas (3.85), (3.89), (3.93), (3.97), (3.102) e definindo  $\varepsilon_1 := \frac{1}{N_1}$  e  $\varepsilon_3 := \frac{1}{N_3}$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left[ NK - c_1 (1 + N_1) N_3 - c_2 N_2 - c_3 (1 + N_3) N_3 - \bar{\xi} \right] \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \left( NK - c_1 N_1 - c_2 N_2 - c_3 N_3^2 \right) \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) N_1 + \frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) N_2 - c_3 N_3^2 \right] \int_0^L |z_x|^2 dx \\ &\quad - (N_2 - 1) \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx - \left( \frac{a_2^2 \rho_u}{\sqrt{a_3}} N_3 - 1 \right) \int_0^L |u_t|^2 dx - 2J(t). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Primeiramente, escolhemos

$$N_2 > 1, \quad N_3 > \frac{\sqrt{a_3}}{a_2^2 \rho_u} \quad \text{e} \quad N_1 > 2c_3 N_3^2 / (a_1 - a_2^2/a_3). \quad (3.107)$$

Agora, como  $\xi(t)\tau(t)$  é não negativo e limitado, e escolhendo  $N$  suficientemente grande para que (3.106) seja levado na seguinte estimativa

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta \int_0^L \left[ \rho_z |z_t|^2 + \rho_u |u_t|^2 + (a_1 - a_2^2/a_3) |z_x|^2 + \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 + \xi(t)\tau(t) \int_0^1 |\eta|^2 dy \right] dx,$$

para alguma constante positiva  $\beta$ . Portanto, de (3.75), temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.108)$$

Em vista de (3.105) e (3.108), notamos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda \mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0, \quad (3.109)$$

para algum  $\lambda > 0$ , o que leva a

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0. \quad (3.110)$$

O resultado desejado (3.76) segue usando as estimativas (3.105) e (3.110). Então, a prova do Teorema 3.3 está completa.  $\square$



## Capítulo 4

# Análise de estabilidade de vigas laminadas com amortecimento Kelvin-Voigt e atraso de tempo forte

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, estamos interessados em estudar o sistema de vigas laminadas com grande atraso em  $(x, t) \in (0, l) \times [0, \infty)$  dado por

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} + G(\psi - u_x)_x &= 0, \\ I_\rho(3S - \psi)_{tt} - D(3S - \psi)_{xx} - G(\psi - u_x) - \mu_1(3S - \psi)_{xxt} - \mu_2(3S - \psi)_{xxt}(x, t - \tau) &= 0, \\ 3I_\rho S_{tt} - 3DS_{xx} + 3G(\psi - u_x) + 4\delta S + 4\gamma S_t &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

sujeito a condições de fronteira dadas por

$$u(0, t) = \psi_x(0, t) = S_x(0, t) = u_x(l, t) = \psi(l, t) = S(l, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in (0, l), \\ \psi_t(x, 0) &= \psi_1(x), \quad S(x, 0) = S_0(x), \quad S_t(x, 0) = S_1(x), \quad x \in (0, l), \\ (3S - \psi)_{xxt}(x, t - \tau) &= f_0(x, t - \tau), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \tau). \end{aligned} \quad (4.3)$$

A viga laminada é um modelo matemático dado por duas placas conectadas por uma camada adesiva de espessura e massa desprezíveis. Um exemplo de aplicação de um adesivo para colar duas placas (camadas) é mostrado na Figura 2.

O modelo foi derivado da teoria de Timoshenko por S. Hansen e R. Spies (HANSEN, 1994;

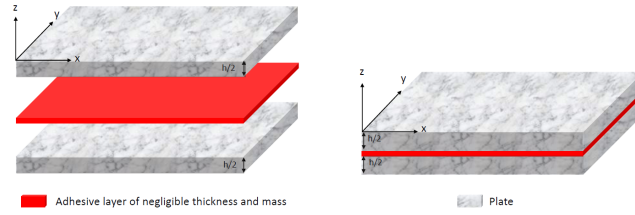


Figura 2 – Aplicação de adesivo (esquerda) e chapa na prensa (direita)

HANSEN; SPIES, 1997) e é dado pelas três equações a seguir

$$\begin{aligned}\rho\omega_{tt} + G(\psi - \omega_x)_x &= 0, \\ I_\rho(3s_{tt} - \psi_{tt}) - G(\psi - \omega_x) - D(3s_{xx} - \psi_{xx}) &= 0, \\ I_\rho s_{tt} + G(\psi - \omega_x) + \frac{4}{3}\gamma s + \frac{4}{3}\beta s_t - Ds_{xx} &= 0,\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde os coeficientes  $\rho, G, I_\rho, D, \gamma, \beta$  são constantes positivas e representam densidade, rigidez ao cisalhamento, momento de inércia de massa, rigidez à flexão, rigidez adesiva e parâmetro de amortecimento adesivo, respectivamente. A função  $\omega(x, t)$  é o deslocamento transversal,  $\psi(x, t)$  é o deslocamento rotacional e  $s(x, t)$  é proporcional à quantidade de escorregamento ao longo da interface. A terceira equação descreve a dinâmica do deslizamento.

Para vigas laminadas sem atraso, começamos citando a contribuição em (WANG; XU; YUNG, 2005), onde os autores consideraram (4.4) com o seguinte controle de contorno,

$$\omega(0) = \psi(0) = s(0) = 0, \quad \psi(1) - \omega_x(1) = k_1\omega_t(1), \quad s_x(1) = 0, \quad (3s_x - \psi_x)(1) = -k_2(3s_t - \psi_t)(1)$$

e obtiveram que a energia decai exponencialmente assumindo  $k_i \neq r_i$  ( $i = 1, 2$ ), onde

$$r_1 := \frac{G}{\rho} \neq \frac{D}{I_\rho} := r_2.$$

Este resultado foi melhorado por M. Mustafa, que estabeleceu o decaimento exponencial para  $r_1 = r_2$  e estendeu esses resultados para casos de funções não lineares no controle de fronteira, veja (MUSTAFA, 2018a). Também podemos encontrar alguns resultados de estabilidade no sistema (4.4) com amortecimento de fronteira em (CAO; LIU; XU, 2007; RAPOSO et al., 2017b; TATAR, 2015), etc. C. Raposo (RAPOSO, 2016) investigou em seu pioneiro trabalho, o sistema (4.4) adicionando termos de amortecimento de atrito na transversal deslocamento e ângulo de rotação, respectivamente. Ele estabeleceu a estabilidade exponencial do sistema sem quaisquer restrições nos coeficientes. O resultado foi estendido para uma estrutura não linear por Feng et al. (FENG et al., 2018). O sistema de vigas laminadas são tão interessantes, que podemos citar diversos resultados envolvendo o sistema (4.4) com outros tipos de mecanismos de amortecimento, como por exemplo (APALARA, 2017; APALARA, 2019; CHEN; LIU; CHEN, 2019; LO; TATAR, 2015; LO; TATAR, 2016; MUSTAFA, 2018b) para citar apenas algumas referências.

Os efeitos de atraso geralmente aparecem em muitos problemas práticos, por exemplo, fenômenos químicos, físicos, térmicos e econômicos, e assim por diante, e a presença de um atraso arbitrariamente pequeno pode desestabilizar um sistema que é uniforme ou assintoticamente estável



na ausência de atraso. Em (NICAISE; PIGNOTTI, 2006), os autores consideraram o sistema de equação de onda

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u &= 0, & x \in \Gamma_0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t - \tau) &= 0, & x \in \Gamma_1, \quad t > 0, \end{aligned}$$

e provaram que a energia decai exponencialmente sob a suposição  $\mu_2 < \mu_1$ , caso contrário, o sistema fica instável. Resultados semelhantes podem ser encontrado em (NICAISE; PIGNOTTI, 2011; NICAISE; PIGNOTTI; VALEIN, 2011).

Para vigas laminadas com retardo de tempo, há poucos resultados. B. Feng (FENG, 2018) estudou o sistema (4.4) com controles na fronteira e termos internos de retardo constantes nas três equações. Ele provou que o sistema é exponencialmente estável se os coeficientes de atraso de tempo forem pequenos. K. Mpungu et al. (MPUNGU; APALARA; MUMINOV, 2021) consideraram o sistema (4.4) com amortecimento por fricção e um termo de retardo interno constante agindo no deslocamento transversal. Eles obtiveram que o sistema é exponencialmente estável supondo que as velocidades de onda iguais se mantém, caso contrário, a energia decai polinomialmente. A. Choucha et al. (CHOUCHA; OUCHENANE; BOULAARAS, 2020) estudaram uma viga laminada termoelástica de Timoshenko com retardo distribuído, considerando a condução de calor dada pela lei de Cattaneo. Eles provaram os mesmos resultados de estabilidade que em (MPUNGU; APALARA; MUMINOV, 2021).

Observe que, combinando as equações (4.4)<sub>2</sub> e (4.4)<sub>3</sub>, obtemos

$$\begin{aligned} \rho \omega_{tt} + G(\psi - \omega_x)_x &= 0, \\ I_\rho \psi_{tt} - D\psi_{xx} + 4G(\psi - \omega_x) + 4\gamma s + 4\beta s_t &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tomando  $s = 0$  em (4.5), o sistema se reduz ao sistema de Timoshenko. B. Said-Houari e Y. Laskri (SAID-HOUARI; LASKRI, 2010) investigaram um sistema Timoshenko com um retardo dado por

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \psi_t + \mu_2 \psi_t(t - \tau) &= 0, \end{aligned}$$

e estabeleceram o decaimento exponencial da energia considerando como uma de suas hipóteses que  $\mu_2 < \mu_1$ . O resultado foi estendido por M. Kirane et al. ao caso do retardo variável no tempo, veja (KIRANE; SAID-HOUARI; ANWAR, 2011). H. Makheloufi et al. (MAKHELOUFI; BAHILIL; FENG, 2021) estudaram um sistema de Timoshenko com um forte amortecimento e um forte retardo dado por

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_{xxt} - \mu_2 \varphi_{xxt}(t - \tau) &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Eles provaram que o sistema não é exponencialmente estável, mesmo que as velocidades de propagações sejam iguais. Porém eles conseguiram provar que o sistema decai polinomialmente com taxa de  $t^{-1/2}$ . Além disso, concluíram que essa taxa de decaimento é ótima. Para obter mais resultados sobre

a estabilidade de Timoshenko com retardo de tempo, pode-se consultar (APALARA; MESSAOUDI, 2015; DJILALI; BENAÏSSA, 2015; GUESMIA, 2014; KAFINI et al., 2015), etc.

Motivados pelas referências citadas acima, consideramos neste capítulo, o sistema de vigas laminadas com grande retado, ou seja,  $\mu_2(3S - \psi)_{xxt}(x, t - \tau)$ . Nosso objetivo é estudar a solução global e os resultados de estabilidade para o sistema, levando em consideração o número de estabilidade

$$\chi := \frac{G}{\rho} - \frac{D}{I_\rho}.$$

Utilizando as técnicas de semigrupo de operadores lineares, provamos a solução global do sistema, veja a Seção 4.2. Na Seção 4.3, usando o Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang, provamos que o sistema (4.1)–(4.3) não é exponencialmente estável se  $\chi \neq 0$ . Por fim, a Seção 4.4 é dedicada ao decaimento de energia do sistema, onde provamos que a energia decai exponencialmente no caso que as velocidades de propagação de ondas sejam iguais, ou seja,  $\chi = 0$ . Caso contrário, se  $\chi \neq 0$ , o sistema vai para zero polinomialmente com taxa  $t^{-1/2}$ .

## 4.2 Solução global

Introduzimos uma nova variável dependente  $z$  para lidar com o termo de feedback de atraso, i.e.,

$$z(x, \eta, t) = (3S - \psi)_t(x, t - \eta\tau) \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, 1) \times (0, \infty). \quad (4.2.1)$$

Verifica-se facilmente que o  $z$  satisfaz

$$\tau z_t(x, \eta, t) + z_\eta(x, \eta, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, 1) \times (0, \infty). \quad (4.2.2)$$

Seguindo a ideia de (WANG; XU; YUNG, 2005), denotamos a rotação efetiva do ângulo por  $\xi := 3S - \psi$ . Por (4.2.2), o sistema (4.1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} + G(3S - \xi - u_x)_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \\ I_\rho \xi_{tt} - D\xi_{xx} - G(3S - \xi - u_x) - \mu_1 \xi_{xxt} - \mu_2 z_{xx}(x, 1, t) &= 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \\ 3I_\rho S_{tt} - 3DS_{xx} + 3G(3S - \xi - u_x) + 4\delta S + 4\gamma S_t &= 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \\ \tau z_t(x, \eta, t) + z_\eta(x, \eta, t) &= 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, 1) \times (0, \infty), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

sujeito às condições de fronteira fornecidas em (4.2), ou seja,

$$u(0, t) = \xi_x(0, t) = S_x(0, t) = u_x(l, t) = \xi(l, t) = S(l, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty) \quad (4.2.4)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1, \quad \xi(x, 0) = \xi_0, \quad x \in (0, l), \\ \xi_t(x, 0) &= \xi_1, \quad S(x, 0) = S_0, \quad S_t(x, 0) = S_1, \quad x \in (0, l), \\ z(x, \eta, 0) &= f_0(x, -\eta\tau) = \xi_2(x, \eta), \quad (x, \eta) \in (0, l) \times (0, 1). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

A seguir, usando a teoria de semigrupo encontrada em (PAZY, 1983), obteremos o resultado de existência, unicidade e regularidade para o problema (4.2.3)–(4.2.5).

Agora, consideremos os seguintes espaços

$$H_a^1(0, l) = \{\varphi : \varphi \in H^1(0, l), \varphi(0) = 0\}, \quad H_b^1(0, l) = \{\varphi : \varphi \in H^1(0, l), \varphi(l) = 0\} \quad (4.2.6)$$

e o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_a^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_b^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_b^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_b^1((0, l); L^2(0, 1)), \quad (4.2.7)$$

munido com o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho \int_0^l w \overline{w^*} dx + G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \overline{(3S^* - \xi^* - u_x^*)} dx + I_\rho \int_0^l v \overline{v^*} dx + D \int_0^l \xi_x \overline{\xi_x^*} dx \\ & + 3I_\rho \int_0^l y \overline{y^*} dx + 3D \int_0^l S_x \overline{S_x^*} dx + 4\delta \int_0^l S \overline{S^*} dx + \zeta \int_0^l \int_0^1 z_x \overline{z_x^*} d\eta dx, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

para qualquer  $U = (u, w, \xi, v, S, y, z)$ ,  $U^* = (u^*, w^*, \xi^*, v^*, S^*, y^*, z^*)$  em  $\mathcal{H}$ , onde  $w = u_t$ ,  $v = \xi_t$  e  $y = S_t$ . A norma induzida pelo produto interno é

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}} = & \rho \|w\|^2 + G \|3S - \xi - u_x\|^2 + I_\rho \|v\|^2 + D \|\xi_x\|^2 + 3I_\rho \|y\|^2 \\ & + 3D \|S_x\|^2 + 4\delta \|S\|^2 + \zeta \int_0^1 \|z_x\|^2 d\eta, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

onde  $\zeta$  é uma constante positiva satisfazendo

$$\tau |\mu_2| \leq \zeta \leq \tau (2\mu_1 - |\mu_2|), \quad (4.2.10)$$

Introduzindo  $U(t) = (u(t), w(t), \xi(t), v(t), S(t), y(t), z(t))^\top$  e  $U_0 = (u_0, u_1, \xi_0, \xi_1, S_0, S_1, \xi_2)^\top$ , o sistema (4.2.3)–(4.2.5) pode ser escrito como o seguinte problema abstrato de valor inicial em  $\mathcal{H}$

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.2.11)$$

onde o operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ w \\ \xi \\ v \\ S \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -G\rho^{-1}(3S - \xi - u_x)_x \\ v \\ I_\rho^{-1}(D\xi_{xx} + G(3S - \xi - u_x) + \mu_1 v_{xx} + \mu_2 z_{xx}(\cdot, 1)) \\ y \\ I_\rho^{-1}(DS_{xx} - G(3S - \xi - u_x) - \frac{4}{3}\delta S - \frac{4}{3}\gamma y) \\ -\tau^{-1}z_\eta \end{pmatrix}, \quad (4.2.12)$$

com

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U := (u, w, \xi, v, S, y, z)^\top \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} u, S, D\xi + \mu_1 v + \mu_2 z(\cdot, 1) \in H^2(0, l), \quad w \in H_a^1(0, l), \\ v, y \in H_b^1(0, l), \quad z \in H_b^1((0, l); H^1(0, 1)), \\ u_x(l) = \xi_x(0) = S_x(0) = z_x(0, \cdot) = 0. \end{array} \right. \right\}. \quad (4.2.13)$$

Note que  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$  e facilmente se mostra a dissipatividade do operador  $\mathcal{A}$  assumindo que  $|\mu_2| < \mu_1$  (para mais detalhes, veja o Teorema 4.4.2), e para cada  $U = (u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  em  $D(\mathcal{A})$ , temos que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -K(\|v_x\|^2 + \|y\|^2 + \|z_x(x, 1)\|^2), \quad (4.2.14)$$

onde  $K := \min\left\{\mu_1 - \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\zeta}{2\tau}, \frac{\zeta}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2}, 4\gamma\right\} > 0$  desde que (4.2.10) se mantenha.

O próximo resultado é o teorema principal dessa seção, que nos garante a existência e unicidade do problema (4.2.11).

**Teorema 4.1** (Solução global)

Suponha que  $|\mu_2| < \mu_1$ , então para qualquer  $U_0 \in \mathcal{H}$ , existe uma única solução  $U \in C([0, \infty), \mathcal{H})$  do problema (4.2.11). Além disso, se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , então

$$U \in C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}). \quad (4.2.15)$$

*Demonstração.* Como o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo. Agora, provaremos que o operador  $\lambda I - \mathcal{A}$  é sobrejetivo para qualquer  $\lambda > 0$ . Para isso, seja  $F = (f_1, f_2, \dots, f_7)^\top \in \mathcal{H}$ , buscamos  $U = (u, w, \xi, v, S, y, z)^\top \in D(\mathcal{A})$  que é solução de  $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ , isto é, as entradas de  $U$  satisfazem o sistema de equações

$$\lambda u - w = f_1, \quad (4.2.16)$$

$$\lambda \rho w + G(3S - \xi - u_x)_x = \rho f_2, \quad (4.2.17)$$

$$\lambda \xi - v = f_3, \quad (4.2.18)$$

$$\lambda I_\rho v - D\xi_{xx} - G(3S - \xi - u_x) - \mu_1 v_{xx} - \mu_2 z_{xx}(x, 1) = I_\rho f_4, \quad (4.2.19)$$

$$\lambda S - y = f_5, \quad (4.2.20)$$

$$3\lambda I_\rho y - 3DS_{xx} + 3G(3S - \xi - u_x) + 4\delta S + 4\gamma y = 3I_\rho f_6, \quad (4.2.21)$$

$$\lambda \tau z + z_\eta = \tau f_7. \quad (4.2.22)$$

Suponha que encontramos  $u$ ,  $\xi$  e  $S$  com a regularidade apropriada. Portanto, de (4.2.16), (4.2.18) e (4.2.20), temos que

$$w = \lambda u - f_1, \quad (4.2.23)$$

$$v = \lambda \xi - f_3, \quad (4.2.24)$$

$$y = \lambda S - f_5. \quad (4.2.25)$$

É claro que  $w \in H_a^1(0, l)$  e  $v, y \in H_b^1(0, l)$ . Além disso,

$$z(x, \eta) = v(x)e^{-\lambda\tau\eta} + \tau e^{-\lambda\tau\eta} \int_0^\eta f_7(x, \sigma) e^{\lambda\tau\sigma} d\sigma \quad (4.2.26)$$

é solução de (4.2.22) satisfazendo

$$z(x, 0) = v(x). \quad (4.2.27)$$

Levando em conta (4.2.24), temos que

$$\begin{aligned}
 z(x, 1) &= \nu e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_7(x, \sigma) e^{\lambda\tau\sigma} d\sigma \\
 &= (\lambda\xi - f_3) e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_7(x, \sigma) e^{\lambda\tau\sigma} d\sigma \\
 &= \lambda\xi e^{-\lambda\tau} - f_3 e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_7(x, \sigma) e^{\lambda\tau\sigma} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Substituindo (4.2.23) em (4.2.17), (4.2.24) e (4.2.28) em (4.2.19) e (4.2.25) em (4.2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \rho u + G(3S - \xi - u_x)_x &= g_1, \\
 \lambda^2 I_\rho \xi - \alpha \xi_{xx} - G(3S - \xi - u_x) &= g_2 + h_{xx}, \\
 \varsigma S - 3DS_{xx} + 3G(3S - \xi - u_x) &= g_3,
 \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= D + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 e^{-\lambda\tau}, \quad \varsigma := 3\lambda^2 I_\rho + 4\delta + 4\lambda\gamma, \\
 g_1 &:= \rho f_2 + \lambda\rho f_1, \quad g_2 := I_\rho f_4 + \lambda I_\rho f_3, \quad g_3 := 3I_\rho f_6 + 3\lambda I_\rho f_5 + 4\gamma f_5, \\
 h_{xx} &:= -(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda\tau}) f_{3,xx} + \mu_2 \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_{7,xx}(x, \sigma) e^{\lambda\tau\sigma} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Para resolver (4.2.29), usamos um procedimento padrão, considerando a forma sesquilinear

$$B: H_a^1(0, l) \times H_b^1(0, l) \times H_b^1(0, l) \rightarrow \mathbb{C}, \tag{4.2.31}$$

dada por

$$\begin{aligned}
 B((u, \xi, S), (u^*, \xi^*, S^*)) &:= \lambda^2 \rho \int_0^l u \overline{u^*} dx + G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \overline{(3S^* - \xi^* - u_x^*)} dx \\
 &\quad + \lambda^2 I_\rho \int_0^l \xi \overline{\xi^*} dx + \alpha \int_0^l \xi_x \overline{\xi_x^*} dx + 3D \int_0^l S_x \overline{S_x^*} dx + \varsigma \int_0^l S \overline{S^*} dx,
 \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

para cada  $(u, \xi, S), (u^*, \xi^*, S^*) \in \mathbb{H} := H_a^1(0, l) \times H_b^1(0, l) \times H_b^1(0, l)$  seguido pelo funcional linear contínuo

$$\mathcal{F}(u^*, \xi^*, S^*) := \int_0^l g_1 \overline{u^*} dx + \int_0^l g_2 \overline{\xi^*} dx - \int_0^l h_x \overline{\xi_x^*} dx + \int_0^l g_3 \overline{S^*} dx, \tag{4.2.33}$$

para cada  $(u^*, \xi^*, S^*) \in \mathbb{H} := H_a^1(0, l) \times H_b^1(0, l) \times H_b^1(0, l)$ .

Não é difícil mostrar que  $B$  é contínua. Para provar que  $B$  é coercivo, observemos que, aplicando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\{B((u, \xi, S), (u, \xi, S))\} &:= \lambda^2 \rho \int_0^l |u|^2 dx + G \int_0^l |3S - \xi - u_x|^2 dx + \lambda^2 I_\rho \int_0^l |\xi|^2 dx \\
 &\quad + \alpha \int_0^l |\xi_x|^2 dx + 3D \int_0^l |S_x|^2 dx + \varsigma \int_0^l |S|^2 dx \\
 &\geq C \|(u, \xi, S)\|_{\mathbb{H}}^2.
 \end{aligned} \tag{4.2.34}$$

Assim, aplicando o Teorema de Lax-Milgram, obtemos uma solução para  $(u, \xi, S) \in \mathbb{H}$  para (4.2.29). Além disso, segue de (4.2.17), (4.2.19) e (4.2.21) que  $u, S, D\xi + \mu_1 v + \mu_2 z(\cdot, 1) \in H^2(0, l)$  e assim  $(u, w, \xi, v, S, y, z) \in D(\mathcal{A})$ . Consequentemente, o resultado do Teorema 4.1 segue do Teorema de Lumer-Phillips.  $\square$

### 4.3 Falta de estabilidade exponencial

Nesta seção, usaremos o Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang 4.2, ((GEARHART, 1978; HUANG, 1985; PRÜSS, 1984)), para provarmos que o sistema (4.2.3)–(4.2.5) não é exponencialmente estável, caso  $\chi \neq 0$ .

#### Teorema 4.2

Seja  $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$  um  $C_0$ -semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , gerado por um operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Então  $T(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad (4.3.1)$$

onde  $\rho(\mathcal{A})$  é o conjunto resolvente do operador linear  $\mathcal{A}$ .

O resultado principal desta seção é dado pelo seguinte teorema:

#### Teorema 4.3

Suponha que  $\chi \neq 0$ , então o semigrupo associado ao sistema (4.2.3)–(4.2.5) não é exponencialmente estável.

*Demonstração.* Para provar este resultado, vamos argumentar por contradição, ou seja, mostraremos que existe uma sequência  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  com  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  e  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$  para  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ , tais que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n, \quad (4.3.2)$$

onde  $(F_n)$  é limitado em  $\mathcal{H}$ , mas  $\|U_n\|_{\mathcal{H}}$  tende ao infinito. Reescrevendo a equação resolvente (4.3.2) em termos de seus componentes, com

$$U_n = (u_n, w_n, \xi_n, v_n, S_n, y_n, z_n)^\top \quad \text{e} \quad F_n = (0, -\rho^{-1} \sin(\beta_n x), 0, 0, 0, 0, 0)^\top,$$

onde  $\beta_n := (2n+1)\pi/2L$ , temos que

$$i\lambda_n u_n - w_n = 0, \quad (4.3.3)$$

$$i\lambda_n \rho w_n + G(3S_n - \xi_n - u_{n,x})_x = -\sin(\beta_n x), \quad (4.3.4)$$

$$i\lambda_n \xi_n - v_n = 0, \quad (4.3.5)$$

$$i\lambda_n I_\rho v_n - D\xi_{n,xx} - G(3S_n - \xi_n - w_{n,x}) - \mu_1 v_{n,xx} - \mu_2 z_{n,xx}(\cdot, 1) = 0, \quad (4.3.6)$$

$$i\lambda_n S_n - y_n = 0, \quad (4.3.7)$$

$$i\lambda_n 3I_\rho y_n - 3DS_{n,xx} + 3G(3S_n - \xi_n - u_{n,x}) + 4\delta S_n + 4\gamma y_n = 0, \quad (4.3.8)$$

$$i\lambda_n \tau z_n + z_{n,\eta} = 0. \quad (4.3.9)$$

De (4.3.3), (4.3.5) e (4.3.7), obtemos  $w_n = i\lambda_n u_n$ ,  $v_n = i\lambda_n \xi_n$  e  $y_n = i\lambda_n S_n$ . Então podemos escrever

$$-\lambda_n^2 \rho u_n + G(3S_n - \xi_n - u_{n,x})_x = -\sin(\beta_n x), \quad (4.3.10)$$

$$-\lambda_n^2 I_\rho \xi_n - D\xi_{n,xx} - G(3S_n - \xi_n - u_{n,x}) - i\lambda_n \mu_1 \xi_{n,xx} - \mu_2 z_{n,xx}(x, 1) = 0, \quad (4.3.11)$$

$$-\lambda_n^2 3I_\rho S_n - 3DS_{n,xx} + 3G(3S_n - \xi_n - u_{n,x}) + 4\delta S_n + 4i\lambda_n \gamma S_n = 0, \quad (4.3.12)$$

$$i\lambda_n \tau z_n + z_{n,\eta} = 0. \quad (4.3.13)$$

Devido às condições de fronteira (4.2.4), as funções dadas por

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \mathbf{A}_n \sin(\beta_n x), & \xi_n(x) &= \mathbf{B}_n \cos(\beta_n x), \\ S_n(x) &= \mathbf{C}_n \cos(\beta_n x), & z_n(x, \eta, \tau) &= \varphi_n(\eta, \tau) \cos(\beta_n x), \end{aligned}$$

são soluções do sistema (4.3.10)–(4.3.13) se, somente se  $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n$  e  $\varphi_n(\eta, \tau)$  satisfazem

$$\left(\lambda_n^2 \rho - \beta_n^2 G\right) \mathbf{A}_n - \beta_n G \mathbf{B}_n + 3\beta_n G \mathbf{C}_n = 1, \quad (4.3.14)$$

$$\beta_n G \mathbf{A}_n - \left(\lambda_n^2 I_\rho - \beta_n^2 D - G - i\lambda_n \mu_1 \beta_n^2\right) \mathbf{B}_n - 3G \mathbf{C}_n + \mu_2 \beta_n^2 \varphi_n(1, \tau) = 0, \quad (4.3.15)$$

$$3\beta_n G \mathbf{A}_n + 3G \mathbf{B}_n + \left(\lambda_n^2 3I_\rho - 3\beta_n^2 D - 9G - 4\delta - 4i\lambda_n \gamma\right) \mathbf{C}_n = 0, \quad (4.3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi_n(\eta, \tau) + i\lambda_n \varphi_n(\eta, \tau) = 0. \quad (4.3.17)$$

De (4.3.5) e z temos  $\varphi_n(0, \tau) = i\lambda_n \mathbf{B}_n$  e resolvendo (4.3.17), obtemos

$$\varphi_n(\eta, \tau) = i\lambda_n e^{-i\lambda_n \tau \eta} \mathbf{B}_n. \quad (4.3.18)$$

Portanto, o sistema (4.3.14)–(4.3.17) é equivalente a

$$\left(\lambda_n^2 \rho - \beta_n^2 G\right) \mathbf{A}_n - \beta_n G \mathbf{B}_n + 3\beta_n G \mathbf{C}_n = 1, \quad (4.3.19)$$

$$\beta_n G \mathbf{A}_n - \left(\lambda_n^2 I_\rho - \beta_n^2 D - G - i\lambda_n \mu_1 \beta_n^2 - i\lambda_n \mu_2 \beta_n^2 e^{-i\lambda_n \tau}\right) \mathbf{B}_n - 3G \mathbf{C}_n = 0, \quad (4.3.20)$$

$$3\beta_n G \mathbf{A}_n + 3G \mathbf{B}_n + \left(\lambda_n^2 3I_\rho - 3\beta_n^2 D - 9G - 4\delta - 4i\lambda_n \gamma\right) \mathbf{C}_n = 0. \quad (4.3.21)$$

Escolhemos a sequência de números reais

$$\lambda_n := \sqrt{\frac{G}{\rho}(1 + \beta_n^2)}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

que nos fornece  $\lambda_n^2 \rho - \beta_n^2 G = G$ . Logo,

$$G \mathbf{A}_n - \beta_n G \mathbf{B}_n + 3\beta_n G \mathbf{C}_n = 1, \quad (4.3.22)$$

$$\beta_n G \mathbf{A}_n - \Phi_n \mathbf{B}_n - 3G \mathbf{C}_n = 0, \quad (4.3.23)$$

$$3\beta_n G \mathbf{A}_n + 3G \mathbf{B}_n + \Psi_n \mathbf{C}_n = 0, \quad (4.3.24)$$

onde

$$\Phi_n := I_\rho \left( \Lambda + \chi \beta_n^2 - i \frac{\mu_1}{I_\rho} \lambda_n \beta_n^2 - i \frac{\mu_2}{I_\rho} \lambda_n e^{-i\tau \lambda_n} \right), \quad (4.3.25)$$

$$\Psi_n := 3I_\rho \left( \Upsilon + \chi \beta_n^2 - \frac{4\delta}{3I_\rho} - i \frac{4\gamma}{3I_\rho} \lambda_n \right), \quad (4.3.26)$$

com

$$\Lambda := \frac{G}{\rho} - \frac{G}{I_\rho} \quad \text{e} \quad \Upsilon := \frac{G}{\rho} - \frac{3G}{I_\rho}.$$

Resolvendo as equações (4.3.23)–(4.3.24), temos que

$$\mathbf{A}_n = \frac{9G^2 - \Psi_n \Phi_n}{3\beta_n G^2 + 3\beta_n G \Phi_n} \mathbf{C}_n \sim -\frac{I_\rho \chi \beta_n}{G} \mathbf{C}_n \quad (4.3.27)$$

e

$$\mathbf{B}_n = -\frac{\Psi_n + 9G}{3G + 3\Phi_n} \mathbf{C}_n \sim -\frac{I_\rho \chi}{i(\mu_1 + \mu_2 e^{-i\tau\lambda_n}) \lambda_n} \mathbf{C}_n. \quad (4.3.28)$$

Substituindo as equações (4.3.27) e (4.3.28) em (4.3.22), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n &\sim -\frac{i(\mu_1 + \mu_2 e^{-i\tau\lambda_n}) \lambda_n}{i\chi(\mu_1 + \mu_2 e^{-i\tau\lambda_n}) \lambda_n - 3i\beta_n G i(\mu_1 + \mu_2 e^{-i\tau\lambda_n}) \lambda_n + G\beta_n I_\rho \chi} \\ &\sim \frac{1}{(I_\rho \chi - 3G) \beta_n}. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Agora, substituindo (4.3.29) em (4.3.27) e (4.3.28), obtemos

$$\mathbf{A}_n \sim \frac{I_\rho \chi}{G(I_\rho \chi - 3G)} \quad (4.3.30)$$

e

$$\mathbf{B}_n \sim \frac{I_\rho \chi}{i(I_\rho \chi - 3G)(\mu_1 + \mu_2 e^{-i\tau\lambda_n}) \lambda_n \beta_n}. \quad (4.3.31)$$

Finalmente, temos que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho \|w_n\|^2 = \lambda_n^2 \rho \|u_n\|^2 = \lambda_n^2 \rho |\mathbf{A}_n|^2 \int_0^L |\sin(\beta_n x)|^2 dx \sim \mathcal{O}(n^2). \quad (4.3.32)$$

Então, como  $n \rightarrow \infty$ , segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = \infty. \quad (4.3.33)$$

Aplicando o Teorema 4.2, concluímos que o semigrupo  $T(t)$  associado ao sistema (4.2.3)–(4.2.5) não tem decaimento exponencial quando  $\chi \neq 0$ .  $\square$

## 4.4 Comportamento assintótico

Esta seção é dedicada ao estudo do comportamento assintótico. Mostraremos que, sob as hipóteses  $|\mu_2| < \mu_1$  e  $\chi = 0$ , a solução do problema (4.2.3)–(4.2.5) é exponencialmente estável usando o método da energia. Caso contrário, a energia decai polinomialmente.



#### 4.4.1 Dissipação da energia

Definimos a energia associada à solução  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^T$  do problema (4.2.3)–(4.2.5) pela seguinte fórmula

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \rho u_t^2 + I_\rho \xi_t^2 + 3I_\rho S_t^2 + D\xi_x^2 + 3DS_x^2 + 4\delta S^2 + G(3S - \psi - u_x)^2 \right) dx + \frac{\zeta}{2} \int_0^l \int_0^1 z_x^2 d\eta dx. \quad (4.4.1)$$

O próximo resultado afirma que a energia é uma função não crescente.

#### Teorema 4.4

Seja  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^T$  uma solução de (4.2.3)–(4.2.5). Para  $|\mu_2| < \mu_1$ , a energia do sistema satisfaz a lei de dissipação, dada por

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -K \left( \int_0^l S_t^2 dx + \int_0^l \xi_{xt}^2 dx + \int_0^l z_x^2(x, 1) dx \right), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (4.4.2)$$

onde  $K := \min \left\{ \mu_1 - \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\zeta}{2\tau}, \frac{\zeta}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2}, 4\gamma \right\} > 0$ .

*Demonstração.* Multiplicando (4.2.3)<sub>1</sub> por  $u_t$ , (4.2.3)<sub>2</sub> por  $\xi_t$ , (4.2.3)<sub>3</sub> por  $S_t$  e integrando cada um deles por partes sobre  $[0, l]$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \rho u_t^2 dx - G \int_0^l (3S - \psi - u_x) u_{xt} dx = 0, \quad (4.4.3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (I_\rho \xi_t^2 + D\xi_x^2) dx - G \int_0^l (3S - \psi - u_x) \xi_t dx + \mu_1 \int_0^l \xi_{xt}^2 dx + \mu_2 \int_0^l \xi_{xt} z_x(x, 1) dx = 0, \quad (4.4.4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (3I_\rho S_t^2 + 3DS_x^2 + 4\delta S^2) dx + 3G \int_0^l (3S - \psi - u_x) S_t dx + 4\gamma \int_0^l S_t^2 dx = 0. \quad (4.4.5)$$

Agora, derivando (4.2.3)<sub>4</sub> em relação a  $x$ , multiplicando o resultado por  $\frac{\zeta}{\tau} z_x$  e integrando sobre  $[0, l] \times [0, 1]$ , obtemos

$$\frac{\zeta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 z_x^2 d\eta dx = -\frac{\zeta}{2\tau} \int_0^l z_x^2(x, 1) dx + \frac{\zeta}{2\tau} \int_0^l \xi_{xt}^2 dx. \quad (4.4.6)$$

Combinando (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) e (4.4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & -\mu_1 \int_0^l \xi_{xt}^2 dx - \mu_2 \int_0^l \xi_{xt} z_x(x, 1) dx - 4\gamma \int_0^l S_t^2 dx \\ & - \frac{\zeta}{2\tau} \int_0^l z_x^2(x, 1) dx + \frac{\zeta}{2\tau} \int_0^l \xi_{xt}^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Aplicando a desigualdade de Young e levando em conta (4.2.10) concluímos a demonstração.  $\square$

#### 4.4.2 Lemas técnicos

Na seção anterior, observamos que o funcional de energia restaura alguns termos de energia com sinal negativo. Estamos interessados em construir um funcional de Lyapunov que restaure a energia total do sistema com sinal negativo e, para isso, consideramos os seguintes lemas.

**Lema 4.5**

Se  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^T$  é uma solução de (4.2.3)–(4.2.5), então o funcional  $I_1$ , definido por

$$I_1(t) := I_\rho \int_0^l \xi \xi_t dx \quad (4.4.8)$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} I_1(t) \leq -\frac{D}{2} \int_0^l \xi_x^2 dx + c_1 \int_0^l \xi_{xt}^2 dx + c_1 \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + c_1 \int_0^l z_x^2(x, 1) dx, \quad (4.4.9)$$

para alguma constante  $c_1 := \max \left\{ I_\rho c_p + \frac{3\mu_1^2}{2D}, \frac{3c_p G^2}{2D}, \frac{3\mu_2^2}{2D} \right\} > 0$ , onde  $c_p$  é a constante de Poincaré.

*Demonstração.* Derivando  $I_1(t)$ , usando (4.2.3) e integrando por partes, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) &= I_\rho \int_0^l \xi_t^2 dx - D \int_0^l \xi_x^2 dx + G \int_0^l \xi (3S - \xi - u_x) dx \\ &\quad - \mu_1 \int_0^l \xi_x \xi_{xt} dx - \mu_2 \int_0^l \xi_x z_x(x, 1) dx. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Segue das desigualdades de Young e Poincaré que

$$\begin{aligned} G \int_0^l \xi (3S - \xi - u_x) dx &\leq \frac{D}{6c_p} \int_0^l \xi^2 dx + \frac{3c_p G^2}{2D} \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx \\ &\leq \frac{D}{6} \int_0^l \xi_x^2 dx + \frac{3c_p G^2}{2D} \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

$$-\mu_1 \int_0^l \xi_x \xi_{xt} dx \leq \frac{D}{6} \int_0^l \xi_x^2 dx + \frac{3\mu_1^2}{2D} \int_0^l \xi_{xt}^2 dx, \quad (4.4.12)$$

$$-\mu_2 \int_0^l \xi_x z_x(x, 1) dx \leq \frac{D}{6} \int_0^l \xi_x^2 dx + \frac{3\mu_2^2}{2D} \int_0^l z_x^2(x, 1) dx. \quad (4.4.13)$$

Consequentemente, de (4.4.10)–(4.4.13), obtemos (4.4.9).  $\square$

**Lema 4.6**

Suponha que  $\chi = 0$ . Se  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^T$  é uma solução de (4.2.3)–(4.2.5), então o funcional  $I_2$ , definido por

$$I_2(t) := -3\rho D \int_0^l u_t S_x dx + 3I_\rho G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S_t dx \quad (4.4.14)$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq -G^2 \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + c_2 \int_0^l \xi_{xt}^2 dx + c_2 \int_0^l S_x^2 dx + c_2 \int_0^l S_t^2 dx, \quad (4.4.15)$$

para alguma constante  $c_2 := \max \left\{ \frac{3I_\rho G}{2}, \frac{21I_\rho G}{2} + 4\gamma^2, 4\delta^2 c_p G \right\} > 0$ , onde  $c_p$  é a constante de Poincaré.

*Demonstração.* Derivando o funcional  $I_2(t)$ , usando (4.2.3), integrando por partes e pelo fato que  $\psi_t = -(3S - \psi)_t + 3S_t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) = & -3G^2 \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx - 3I_\rho G \int_0^l S_t \xi_t dx + 9I_\rho G \int_0^l S_t^2 dx \\ & - 4\delta G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S dx - 4\gamma G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S_t dx - \underbrace{3(I_\rho G - \rho D) \int_0^l u_{xt} S_t dx}_{\mathcal{J}:=} \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Como  $\chi = 0$ , o termo  $\mathcal{J}$  é na verdade igual a zero. Explorando as desigualdades de Young e Poincaré, estimamos os termos não quadrados de (4.4.16) como segue

$$-3I_\rho G \int_0^l S_t \xi_t dx \leq \frac{3I_\rho G}{2} \int_0^l \xi_t^2 dx + \frac{3I_\rho G}{2} \int_0^l S_t^2 dx, \quad (4.4.17)$$

$$\begin{aligned} -4\delta G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S dx & \leq G \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + 4\delta^2 G \int_0^l S^2 dx \\ & \leq G \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + 4\delta^2 c_p G \int_0^l S_x^2 dx, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

$$-4\gamma G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S_t dx \leq G \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + 4\gamma^2 G \int_0^l S_t^2 dx. \quad (4.4.19)$$

Substituindo as três estimativas acima em (4.4.16) completamos a prova.  $\square$

#### Lema 4.7

Se  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^\top$  é uma solução de (4.2.3)–(4.2.5), então o funcional  $I_3$ , definido por

$$I_3(t) := 3I_\rho \int_0^l S_t S dx + 3\rho \int_0^l u_t \int_0^x S(r) dr dx \quad (4.4.20)$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} I_3(t) \leq -3D \int_0^l S_x^2 dx - 3\delta \int_0^l S^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^l u_t^2 dx + c_3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^l S_t^2 dx, \quad (4.4.21)$$

para qualquer  $\varepsilon_3 > 0$  e algum  $c_3 := \max\left\{3I_\rho, \frac{4\gamma^2}{\delta}, \frac{9I_\rho^2}{4}\right\}$ .

*Demonstração.* Derivando  $I_3(t)$ , usando (4.2.3) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) = & -3D \int_0^l S_x^2 dx - 4\delta \int_0^l S^2 dx - 4\gamma \int_0^l S_t S dx \\ & + 3I_\rho \int_0^l S_t^2 dx + 3\rho \int_0^l u_t \int_0^x S_t(r) dr dx. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Usando as desigualdades de Young e de Cauchy-Schwarz, estimamos que

$$-4\gamma \int_0^l S_t S dx \leq \delta \int_0^l S^2 dx + \frac{4\gamma^2}{\delta} \int_0^l S_t^2 dx, \quad (4.4.23)$$

$$\begin{aligned}
3\rho \int_0^l u_t \int_0^x S_t(r) dr dx &\leq \varepsilon_3 \int_0^l u_t^2 dx + \frac{9\rho^2}{4\varepsilon_3} \int_0^l \left( \int_0^x S_t(r) dr \right)^2 dx \\
&\leq \varepsilon_3 \int_0^l u_t^2 dx + \frac{9l\rho^2}{4\varepsilon_3} \int_0^l S_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

A estimativa (4.4.21) segue de (4.4.22)–(4.4.24).  $\square$

#### Lema 4.8

Se  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^T$  é uma solução de (4.2.3)–(4.2.5), então o funcional  $I_4$ , definido por

$$I_4(t) := -\rho \int_0^l u_t u dx \tag{4.4.25}$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} I_4(t) \leq -\rho \int_0^l u_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^l \xi_x^2 dx + c_4 \int_0^l S_x^2 dx + c_4 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx, \tag{4.4.26}$$

para qualquer  $\varepsilon_4 > 0$  e algum  $c_4 := \max\left\{\frac{5G}{2}, \frac{G^2 c_p}{4}\right\} > 0$ , onde  $c_p$  é a constante de Poincaré.

*Demonstração.* Derivando de  $I_4(t)$ , usando (4.2.3), integrando por partes e pelo fato que  $u_x = -(3S - \xi - u_x) - \xi + 3S$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_4(t) &= -\rho \int_0^l u_t^2 dx + G \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx \\
&\quad + G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \xi dx - 3G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S dx.
\end{aligned} \tag{4.4.27}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, o terceiro e quarto termos em (4.4.27) podem ser estimados como segue

$$\begin{aligned}
G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \xi dx &\leq \frac{G^2 c_p}{4\varepsilon_4} \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + \frac{\varepsilon_4}{c_p} \int_0^l \xi^2 dx \\
&\leq \frac{G^2 c_p}{4\varepsilon_4} \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^l \xi_x^2 dx,
\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

$$\begin{aligned}
-3G \int_0^l (3S - \xi - u_x) S dx &\leq \frac{3G}{2} \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + \frac{3G}{2} \int_0^l S^2 dx \\
&\leq \frac{3G}{2} \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx + \frac{3G c_p}{2} \int_0^l S_x^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.4.29}$$

A afirmação do lema segue substituindo as duas estimativas acima em (4.4.27).  $\square$

#### Lema 4.9

Se  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^T$  é uma solução de (4.2.3)–(4.2.5), então o funcional  $I_5$ , definido por

$$I_5(t) := \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\eta} z_x^2(x, \eta) d\eta dx \tag{4.4.30}$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} I_5(t) \leq -e^{-2\tau} \int_0^l \int_0^1 z_x^2(x, \eta) d\eta dx - \frac{e^{-2\tau}}{2\tau} \int_0^l z_x^2(x, 1) dx + \frac{1}{2\tau} \int_0^l \xi_{xt}^2 dx. \tag{4.4.31}$$

*Demonstração.* Diferenciando  $I_5(t)$  e usando (4.2.3), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_5(t) &= -\frac{1}{\tau} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\eta} z_x(x, \eta) z_{x\eta}(x, \eta) d\eta dx \\ &= -\int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\eta} z_x^2(x, \eta) d\eta dx - \frac{1}{2\tau} \int_0^l \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} (e^{-2\tau\eta} z_x^2(x, \eta)) d\eta dx \\ &= -\int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\eta} z_x^2(x, \eta) d\eta dx - \frac{1}{2\tau} \int_0^l (e^{-2\tau} z_x^2(x, 1) - \xi_{xt}^2) dx. \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Em seguida, explorando a desigualdade  $e^{-2\tau} \leq e^{-2\tau\eta} \leq 1$  para qualquer  $\eta \in (0, 1)$ , chegamos na estimativa (4.4.31).  $\square$

#### 4.4.3 Estabilidade exponencial

Estamos agora em condições de provar nosso principal resultado, que é enunciado no seguinte teorema:

##### **Teorema 4.10** (Decaimento exponencial)

Seja  $U(t) = (u(t), u_t(t), \xi(t), \xi_t(t), S(t), S_t(t), z(t))^\top$  a solução de (4.2.3)–(4.2.5) com dados iniciais  $U_0 \in D(\mathcal{A})$  e  $E(t)$  a energia de  $U$ . Suponhamos que  $|\mu_2| < \mu_1$  e  $\chi = 0$ , então existem constantes positivas  $M$  e  $\sigma$  tais que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\sigma t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (4.4.33)$$

*Demonstração.* Construiremos um funcional de Lyapunov adequado  $\mathcal{L}$  que satisfaça a seguinte relação de equivalência

$$\kappa_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \kappa_2 E(t), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (4.4.34)$$

para algum  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  e provaremos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\lambda \mathcal{L}(t), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (4.4.35)$$

para algum  $\lambda > 0$ , o que implica

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\lambda t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (4.4.36)$$

Definimos o funcional de Lyapunov dado por

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + \sum_{i=1}^5 N_i I_i(t), \quad (4.4.37)$$

onde  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  são números reais positivos que serão escolhidos posteriormente. Pela definição de  $\mathcal{L}(t)$ , temos que

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq N_1 \left( I_\rho \int_0^l |\xi \xi_t| dx \right) \\
 &\quad + N_2 \left( 3\rho D \int_0^l |u_t S_x| dx + 3I_\rho G \int_0^l |(3S - \xi - u_x) S_t| dx \right) \\
 &\quad + N_3 \left( 3I_\rho \int_0^l |S_t S| dx + 3\rho \int_0^l \left| u_t \int_0^x S(r) dr \right| dx \right) \\
 &\quad + N_4 \rho \int_0^l |u_t u| dx + N_5 \int_0^l \int_0^1 |e^{-2\tau\eta} z_x^2(x, \eta)| d\eta dx.
 \end{aligned} \tag{4.4.38}$$

Segue de (4.4.1), das desigualdades de Young, Poincaré e Cauchy-Schwarz e do fato de que  $e^{-2\tau} \leq e^{-2\tau\eta} \leq 1$  para qualquer  $\eta \in (0, 1)$  que

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq \sigma_1 \int_0^l \left[ u_t^2 + \xi_t^2 + S_t^2 + \xi_x^2 + S_x^2 + S^2 + (3S - \xi - u_x)^2 + \int_0^1 z_x^2 d\eta \right] dx \\
 &\leq \sigma_2 E(t),
 \end{aligned}$$

para alguma constante  $\sigma_2 > 0$ . Então, podemos escolher  $N$  suficientemente grande para que  $\kappa_1 := N - \sigma_2$  e  $\kappa_2 := N + \sigma_2$ , então obtemos que

$$\kappa_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \kappa_2 E(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.4.39}$$

Agora, tomando a derivada de  $\mathcal{L}(t)$ , substituindo as estimativas (4.4.2), (4.4.9), (4.4.15), (4.4.21), (4.4.26), (4.4.31) e tomando

$$N_1 = N_4 = N_5 = 1, \quad \varepsilon_3 = \frac{\rho}{2N_3} \quad \text{e} \quad \varepsilon_4 = \frac{D}{4}, \tag{4.4.40}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left( NK - c_1 - c_2 N_2 - \frac{1}{2\tau} \right) \int_0^l \xi_{xt}^2 dx - \left( NK - c_1 + \frac{e^{-2\tau}}{2\tau} \right) \int_0^l z_x^2(x, 1) dx \\
 &\quad - \left( NK - c_2 N_2 - c_3 (1 + 2N_3) N_3 \right) \int_0^l S_t^2 dx - \frac{D}{4} \int_0^l \xi_x^2 dx \\
 &\quad - \left[ G^2 N_2 - c_1 - c_4 \left( 1 + \frac{4}{D} \right) \right] \int_0^l (3S - \xi - u_x)^2 dx - (3DN_3 - c_2 N_2 - c_4) \int_0^l S_x^2 dx \\
 &\quad - 2\delta N_3 \int_0^l S^2 dx - \frac{\rho}{2} \int_0^l u_t^2 dx - \frac{e^{-2\tau}}{2\tau} \int_0^l \int_0^1 z_x^2(x, \eta) d\eta dx.
 \end{aligned} \tag{4.4.41}$$

Primeiramente, vamos escolher  $N_2$  suficientemente grande, tal que

$$G^2 N_2 - c_1 - c_4 \left( 1 + \frac{4}{D} \right) > 0. \tag{4.4.42}$$

Em seguida, selecionamos  $N_3$  grande o suficiente, tal que

$$3DN_3 - c_2 N_2 - c_4 > 0. \tag{4.4.43}$$

Agora, escolhendo  $N$  suficientemente grande, i.e.,

$$N > \max \left\{ (c_1 + c_2 N_2 + 1/2\tau)K^{-1}, c_1 K^{-1}, (c_2 N_2 + c_3(1 + 2N_3)N_3)K^{-1}, \sigma_2 \right\} \quad (4.4.44)$$

e aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -\sigma_3 \int_0^l \left( u_t^2 + \xi_t^2 + S_t^2 + \xi_x^2 + S_x^2 + S^2 + (3S - \xi - u_x)^2 + z^2(x, 1) + \int_0^1 z^2 d\eta \right) dx \\ &\leq -\sigma_3 \int_0^l \left( u_t^2 + \xi_t^2 + S_t^2 + \xi_x^2 + S_x^2 + S^2 + (3S - \xi - u_x)^2 + \int_0^1 z^2 d\eta \right) dx, \end{aligned} \quad (4.4.45)$$

para alguma constante positiva  $\sigma_3$ . Portanto, de (4.4.1), temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\sigma_4 E(t), \quad \text{para todo } t > 0. \quad (4.4.46)$$

Em vista de (4.4.39) e (4.4.46), notamos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{\sigma_4}{\kappa_2} \mathcal{L}(t), \quad \text{para todo } t > 0, \quad (4.4.47)$$

o que leva a

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\frac{\sigma_4}{\kappa_2} t}, \quad \text{para todo } t > 0. \quad (4.4.48)$$

O resultado desejado (4.4.33) segue usando estimativas (4.4.39) e (4.4.48). Então, a prova do Teorema 4.10 está completa.  $\square$

#### 4.4.4 Estabilidade polinomial

Nesta seção, mostraremos que o semigrupo relacionado ao sistema de vigas laminadas (4.2.3)–(4.2.5) decai polinomialmente com taxa  $t^{-1/2}$ , se  $\chi \neq 0$ . Mas primeiro, precisamos nos lembrar de uma noção intermediária de estabilidade, conhecida como estabilidade semiuniforme. Por definição, dizemos que o semigrupo  $T(t)$  é semiuniformemente estável se existe uma função não negativa  $\psi(t)$  que se anula no infinito tal que

$$\|T(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \psi(t) \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } U_0 \in D(\mathcal{A}). \quad (4.4.49)$$

A noção de estabilidade semiuniforme produz um conceito mais forte do que estabilidade. Mais precisamente, garante a convergência  $T(t)U_0 \rightarrow 0$  para todo  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , e como  $T(t)$  é limitado, ele imediatamente segue a convergência  $T(t)U_0 \rightarrow 0$  para todo  $U_0 \in \mathcal{H}$ .

Em relação à estabilidade semiuniforme, temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.11** (Batty (BATTY, 1994; BATTY; DUYCKAERTS, 2008))

O semigrupo  $T(t)$  é semiuniformemente estável se, e somente se,  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ .

Para garantir que  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ , precisamos do resultado dado na proposição abaixo.

#### Proposição 4.12

$D(\mathcal{A}) \Subset \mathcal{H}$ , i.e., a inclusão  $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$  é compacta.

**Demonstração.** Seja  $U_n = (u_n, w_n, \xi_n, v_n, S_n, y_n, z_n)^\top$  uma sequência limitada em  $D(\mathcal{A})$ . Em particular, temos

$$\begin{aligned} u_n &\text{ é limitado em } H^2(0, l) \subseteq H_a^1(0, l), \quad S_n \text{ é limitado em } H^2(0, l) \subseteq H_b^1(0, l), \\ w_n &\text{ é limitado em } H_a^1(0, l) \subseteq L^2(0, l), \quad v_n, y_n \text{ é limitado em } H_b^1(0, l) \subseteq L^2(0, l), \\ z_n &\text{ é limitado em } H_b^1((0, l); H^1(0, 1)) \subseteq L^2((0, l); H^1(0, 1)). \end{aligned}$$

Consequentemente, existem  $u, S \in H^1(0, l)$ ,  $w, v, y \in L^2(0, l)$  e  $z \in L^2((0, l); H^1(0, 1))$  tais que, até uma subsequência,

$$u_n \rightarrow u \text{ em } H_a^1(0, l), \quad S_n \rightarrow S \text{ em } H_b^1(0, l), \quad w_n \rightarrow w \text{ em } L^2(0, l) \quad (4.4.50)$$

e

$$v_n \rightarrow v \text{ em } L^2(0, l), \quad y_n \rightarrow y \text{ em } L^2(0, l), \quad z_n \rightarrow z \text{ em } L^2((0, l); H^1(0, 1)). \quad (4.4.51)$$

Resta provar a convergência  $\xi_n \rightarrow \xi$  em  $H_b^1(0, l)$  para algum  $\xi$  em  $H_b^1(0, l)$ . De fato, sabendo que

$$D\xi_n + \mu_1 v_n + \mu_2 z_n(\cdot, 1) \text{ é limitado em } H^2(0, l),$$

obtemos a convergência, até uma subsequência

$$D\xi_n + \mu_1 v_n + \mu_2 z_n(\cdot, 1) \rightarrow \zeta \text{ em } H_b^1(0, l),$$

Por (4.4.51), concluímos que  $\xi_n \rightarrow \xi := D^{-1}(\zeta - \mu_1 v - \mu_2 z(\cdot, 1))$  em  $H_b^1(0, l)$ . □

#### Observação 4.13

Como  $D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H}$ , a inversa  $\mathcal{A}^{-1}$  é compacta. Segue imediatamente do Lema 4.14 (abaixo) que o espectro de  $\mathcal{A}$  consiste inteiramente de autovalores isolados.

#### Lema 4.14 (Kato (KATO, 1980), Theorem 6.29)

Seja  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  um operador linear fechado atuando em um espaço de Banach complexo  $X$ . Se  $\mathcal{A}$  for invertível e o operador inverso  $\mathcal{A}^{-1}$  for compacto, então o espectro de  $\mathcal{A}$  consiste inteiramente de autovalores isolados.

#### Lema 4.15

Sob as notações acima temos que  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ .

**Demonstração.** Como o espectro de  $\mathcal{A}$  consiste inteiramente de autovalores isolados, podemos supor, por contradição, que  $\mathcal{A}$  tem um autovalor imaginário, i.e.,

$$(i\lambda - \mathcal{A})U = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.4.52)$$



onde  $U = (u, w, \xi, v, S, y, z)^\top \in D(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ . Em coordenadas, temos que

$$i\lambda u - w = 0, \quad (4.4.53)$$

$$i\lambda \rho w + G(3S - \xi - u_x)_x = 0, \quad (4.4.54)$$

$$i\lambda \xi - v = 0, \quad (4.4.55)$$

$$i\lambda I_\rho v - D\xi_{xx} - G(3S - \xi - u_x) - \mu_1 v_{xx} - \mu_2 z_{xx}(x, 1) = 0, \quad (4.4.56)$$

$$i\lambda S - y = 0, \quad (4.4.57)$$

$$i\lambda 3I_\rho y - 3DS_{xx} + 3G(3S - \xi - u_x) + 4\delta S + \gamma y = 0, \quad (4.4.58)$$

$$\lambda \tau z + z_\eta = 0. \quad (4.4.59)$$

Da estimativa (4.2.14), obtemos  $v_x = y = z_x(x, 1) = 0$ . Usando a desigualdade de Poincaré, temos que  $v = 0$ , o que implica que  $\xi = \xi_x = \xi_{xx} = v_{xx} = 0$  (veja a Eq. (4.4.55)). De  $y = 0$ , temos que  $S = S_x = 0$  (veja Eq. (4.4.57)) e  $z_x(x, 1) = 0$  implica que  $z_{xx}(x, 1) = 0$ . Por outro lado, da Eq. (4.4.56), obtemos que

$$u_x = 0 \Rightarrow u = 0. \quad (4.4.60)$$

Consequentemente,  $3S - \xi - u_x = 0$ . Da Eq. (4.4.54), deduzimos que  $w = 0$ . Isso implica que  $U = 0$ . Mas isso é uma contradição, portanto não há autovalores imaginários.  $\square$

Nesta fase, podemos usar o seguinte Teorema:

**Teorema 4.16** (Borichev & Tomilov ([BORICHEV; TOMILOV, 2010](#)), Theorem 2.4)

Seja  $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$  um semigrupo de contração em um espaço de Hilbert complexo  $X$ . Suponha que  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ . Então, para cada  $\alpha > 0$  fixo,

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^\alpha) \quad \text{quando} \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

se, e somente se,

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/\alpha}) \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Para provar a taxa de decaimento polinomial, consideramos aqui a equação resolvente escrita como

$$(i\lambda - \mathcal{A})U = F, \quad (4.4.61)$$

onde  $U = (u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  e  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^\top \in \mathcal{H}$ . Em coordenadas, temos que

$$i\lambda u - w = f_1, \quad (4.4.62)$$

$$i\lambda \rho w + G(3S - \xi - u_x)_x = \rho f_2, \quad (4.4.63)$$

$$i\lambda \xi - v = f_3, \quad (4.4.64)$$

$$i\lambda I_\rho v - D\xi_{xx} - G(3S - \xi - u_x) - \mu_1 v_{xx} - \mu_2 z_{xx}(x, 1) = I_\rho f_4, \quad (4.4.65)$$

$$i\lambda S - y = f_5, \quad (4.4.66)$$

$$i\lambda 3I_\rho y - 3DS_{xx} + 3G(3S - \xi - u_x) + 4\delta S + \gamma y = 3I_\rho f_6, \quad (4.4.67)$$

$$\lambda \tau z + z_\eta = \tau f_7. \quad (4.4.68)$$

Por outro lado, segue de (4.2.14) que

$$K(\|v_x\|^2 + \|y\|^2 + \|z_x(x, 1)\|^2) \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.69)$$

Considerando o sistema (4.4.62)–(4.4.68), obtêm-se os seguintes lemas.

**Lema 4.17**

Seja  $(u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  uma solução do sistema (4.4.62)–(4.4.68). Então existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\lambda$ , tal que

$$\|3S - \xi - u_x\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

*Demonstração.* Multiplicando a Eq. (4.4.65) por  $\overline{3S - \xi - u_x}$  e integrando sobre  $[0, l]$ , obtemos

$$\begin{aligned} & i\lambda I_\rho \int_0^l v \overline{(3S - \xi - u_x)} dx + \underbrace{D \int_0^l \xi_x \overline{(3S - \xi - u_x)_x} dx}_{I_1 :=} - G\|3S - \xi - u_x\|^2 \\ & + \underbrace{\mu_1 \int_0^l v_x \overline{(3S - \xi - u_x)_x} dx}_{I_2 :=} + \underbrace{\mu_2 \int_0^l z_x(x, 1) \overline{(3S - \xi - u_x)_x} dx}_{I_3 :=} \\ & = I_\rho \int_0^l f_4 \overline{(3S - \xi - u_x)} dx. \end{aligned} \quad (4.4.70)$$

Da Eq. (4.4.63) e (4.4.64), temos que

$$\begin{aligned} I_1 & := D \int_0^l \xi_x \overline{(3S - \xi - u_x)_x} = i\lambda \frac{\rho D}{G} \int_0^l \xi_x \overline{w} dx + \frac{\rho D}{G} \int_0^l \overline{f_2} \xi_x dx \\ & = \frac{\rho D}{G} \int_0^l v_x \overline{w} dx + \frac{\rho D}{G} \int_0^l f_{3,x} \overline{w} dx + \frac{\rho D}{G} \int_0^l \overline{f_2} \xi_x dx. \end{aligned} \quad (4.4.71)$$

Por outro lado, usando a Eq. (4.4.63) em  $I_2$  e  $I_3$ , temos que

$$I_2 := \mu_1 \int_0^l v_x \overline{(3S - \xi - u_x)_x} = i\lambda \frac{\rho \mu_1}{G} \int_0^l v_x \overline{w} dx + \frac{\rho \mu_1}{G} \int_0^l \overline{f_2} v_x dx \quad (4.4.72)$$

e

$$I_3 := \mu_2 \int_0^l z_x(x, 1) \overline{(3S - \xi - u_x)_x} = i\lambda \frac{\rho \mu_2}{G} \int_0^l z_x(x, 1) \overline{w} dx + \frac{\rho \mu_2}{G} \int_0^l \overline{f_2} z_x(x, 1) dx. \quad (4.4.73)$$

Consequentemente, de (4.4.70), (4.4.71), (4.4.72) e (4.4.73), obtemos

$$\begin{aligned} G\|3S - \xi - u_x\|^2 & = i\lambda I_\rho \int_0^l v \overline{(3S - \xi - u_x)} dx + \frac{\rho D}{G} \int_0^l v_x \overline{w} dx + \frac{\rho D}{G} \int_0^l f_{3,x} \overline{w} dx \\ & \quad + \frac{\rho D}{G} \int_0^l \overline{f_2} \xi_x dx + i\lambda \frac{\rho \mu_1}{G} \int_0^l v_x \overline{w} dx + \frac{\rho \mu_1}{G} \int_0^l \overline{f_2} v_x dx \\ & \quad + i\lambda \frac{\rho \mu_2}{G} \int_0^l z_x(x, 1) \overline{w} dx + \frac{\rho \mu_2}{G} \int_0^l \overline{f_2} z_x(x, 1) dx. \end{aligned} \quad (4.4.74)$$

Usando a desigualdade de Young e a estimativa (4.4.69), obtemos

$$\frac{G}{2}\|3S - \xi - u_x\|^2 \leq \frac{G\varepsilon}{2}\|w\|^2 + \lambda^2 C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Isso conclui a prova.  $\square$

**Lema 4.18**

Seja  $(u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  uma solução do sistema (4.4.62)–(4.4.68). Então existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\lambda$ , tal que

$$\|S_x\|^2 + \|S\|^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

*Demonstração.* Multiplicando a Eq. (4.4.67) por  $\bar{S}$  e integrando sobre  $[0, l]$ , obtemos

$$3D\|S_x\|^2 + 4\delta\|S\|^2 = -i\lambda 3I_\rho \int_0^l y \bar{S} dx - 3G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \bar{S} dx - \gamma \int_0^l y \bar{S} dx + 3I_\rho \int_0^l f_6 S dx.$$

Usando as desigualdades de Cauchy–Schwarz, Young, Poincaré e a estimativa (4.4.69), obtemos

$$3D\|S_x\|^2 + 3\delta\|S\|^2 \leq \lambda C \|y\|^2 + C \|3S - \xi - u_x\|^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.4.75)$$

e

$$3D\|S_x\|^2 + 3\delta\|S\|^2 \leq C \|3S - \xi - u_x\|^2 + |\lambda| C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.76)$$

Finalmente, usando o Lema 4.17 obtemos

$$3D\|S_x\|^2 + 3\delta\|S\|^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + |\lambda| C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.77)$$

Isso completa a prova do Lema.  $\square$

**Lema 4.19**

Seja  $(u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  uma solução do sistema (4.4.62)–(4.4.68). Então existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\lambda$ , tal que

$$\|\xi_x\|^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (4.4.78)$$

*Demonstração.* Multiplicando a Eq. (4.4.65) por  $\bar{\xi}$  e integrando sobre  $[0, l]$ , obtemos

$$\begin{aligned} D\|\xi_x\|^2 &= -i\lambda I_\rho \int_0^l v \bar{\xi} dx + G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \bar{\xi} dx - \underbrace{\mu_1 \int_0^l y_x \bar{\xi}_x dx}_{I_4:=} \\ &\quad - \mu_2 \int_0^l z_x(x, 1) \bar{\xi}_x dx + I_\rho \int_0^l f_4 \bar{\xi} dx. \end{aligned} \quad (4.4.79)$$

Usando a Eq. (4.4.66) em  $I_4$ , as desigualdades de Cauchy–Schwarz, Young, Poincaré e a estimativa (4.4.69), obtemos

$$\frac{D}{2} \|\xi_x\|^2 \leq C \|3S - \xi - u_x\|^2 + C \|S_x\|^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.80)$$

Finalmente, usando os Lemas 4.17, 4.18, temos que

$$D\|\xi_x\|^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.81)$$

Isso conclui a prova.  $\square$

**Lema 4.20**

Seja  $(u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  uma solução do sistema (4.4.62)–(4.4.68). Então existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\lambda$ , tal que

$$\|w\|^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

desde que  $|\lambda| > 1$ .

*Demonstração.* Multiplicando a Eq. (4.4.63) por  $-i\lambda^{-1}\bar{w}$  e integrando sobre  $[0, l]$ , obtemos

$$\rho \|w\|^2 + \frac{iG}{\lambda} \int_0^l (3S - \xi - u_x) \bar{w}_x dx = -\frac{i\rho}{\lambda} \int_0^l f_2 \bar{w} dx. \quad (4.4.82)$$

De (4.4.62), temos  $\bar{w}_x = (i\lambda \bar{u}_x - \bar{f}_{1,x})$  e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \rho \|w\|^2 &= G \int_0^l (3S - \xi - u_x) \bar{u}_x dx + \frac{iG}{\lambda} \int_0^l f_{1,x} (3S - \xi - u_x) dx - \frac{i\rho}{\lambda} \int_0^l f_2 \bar{w} dx \\ &= -G \|3S - \xi - u_x\|^2 + G \int_0^l (3S - \xi - u_x) (3S - \xi) dx \\ &\quad + \frac{iG}{\lambda} \int_0^l f_{1,x} (3S - \xi - u_x) dx - \frac{i\rho}{\lambda} \int_0^l f_2 \bar{w} dx. \end{aligned} \quad (4.4.83)$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young e os Lemas 4.17, 4.18 e 4.19, temos que

$$\rho \|w\|^2 \leq C \|3S - \xi - u_x\|^2 + \varepsilon C \|S_x\|^2 + \varepsilon C \|\xi_x\|^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$$

e

$$\rho \|w\|^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$$

Isso completa a prova do Lema. □

**Lema 4.21**

Seja  $(u, w, \xi, v, S, y, z)^\top$  uma solução do sistema (4.4.62)–(4.4.68). Então existe uma constante positiva  $C$ , independente de  $\lambda$ , tal que

$$\int_0^1 \|z_x\|^2 d\rho \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

desde que  $|\lambda| > 1$ .

*Demonstração.* Diferenciando (4.4.68) em relação a  $x$  e multiplicando o resultado por  $z_x$  e logo em seguida, integrando sobre  $[0, l] \times [0, 1]$ , obtemos

$$i\lambda\tau \int_0^1 \|z_x\|^2 d\eta + \frac{1}{2} \|z_x(x, 1)\|^2 = \frac{1}{2} \|z_x(x, 0)\|^2 + \tau \int_0^l \int_0^1 f_{7,x} \bar{z}_x dx d\eta. \quad (4.4.84)$$

Assim, tomando a parte imaginária, temos que

$$|\lambda| \int_0^1 \|z_x\|^2 d\eta \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.85)$$

Isso conclui a prova. □

Estamos agora em condições de provar o seguinte resultado de decaimento polinomial:

**Teorema 4.22** (Decaimento polinomial)

Suponhamos que  $\chi \neq 0$ . Então o semigrupo  $T(t)$  associado ao sistema (4.4.62)–(4.4.68) satisfaz

$$\|T(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \text{para todo } t > 0, U_0 \in D(\mathcal{A}). \quad (4.4.86)$$

*Demonstração.* Do Lema 4.15, temos  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ . Então usaremos o Teorema 4.16 para mostrar a estabilidade polinomial. Segue dos Lemas 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21 que

$$\|w\|^2 + \|\xi_x\|^2 + \|S_x\|^2 + \|S\|^2 + \|3S - \xi - w_x\|^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.87)$$

Usando a desigualdade de Poincaré na estimativa (4.4.69), temos que

$$\|v\|^2 + \|y\|^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.88)$$

Adicionando (4.4.87) e (4.4.88), obtemos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.89)$$

Consequentemente, temos que

$$(1 - 2\varepsilon C) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \lambda^4 C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.4.90)$$

Agora, escolhemos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, tal que  $1 - 2\varepsilon C > 0$ . Então, após o uso de (4.4.61), segue que

$$\frac{1}{\lambda^2} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.4.91)$$

Portanto, a partir do Teorema de Borichev e Tomilov (ver Teorema 4.16), provamos que a solução decai polinomialmente (lento) com taxa  $t^{-1/2}$  à medida que o tempo vai para o infinito.  $\square$



## Referências

- APALARA, T. A. Asymptotic behavior of weakly dissipative timoshenko system with internal constant delay feedbacks. *Appl. Anal.*, v. 95, n. 1, p. 187–202, 2016.
- APALARA, T. A. Uniform stability of a laminated beam with structural damping and second sound. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 68, 2017.
- APALARA, T. A. On the stability of a thermoelastic laminated beam. *Acta Math. Sci. Ser. B.*, v. 39, p. 1517–1524, 2019.
- APALARA, T. A.; MESSAOUDI, S. A. An exponential stability result of a timoshenko system with thermoelasticity with second sound and in the presence of delay. *Appl. Math. Optim.*, v. 71, p. 449–472, 2015.
- ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, v. 29, n. 2, p. 209–244, 1976.
- BARROS, V.; NONATO, C.; RAPOSO, C. Global existence and energy decay of solutions for a wave equation with non-constant delay and nonlinear weights. *Electron. Res. Arch.*, v. 28, p. 549–567, 2020.
- BATTY, C. J. K. *Asymptotic behaviour of semigroups of operators*, in "Functional analysis and operator theory". Warsaw: vol. 30, Banach Center Publ. Polish Acad. Sci., 1994.
- BATTY, C. J. K.; DUYCKAERTS, T. Non-uniform stability for bounded semi-groups on banach spaces. *J. Evol. Equ.*, v. 8, p. 765–780, 2008.
- BEDFORD, A.; DRUMHELLER, D. Theories of immiscible and structured mixtures. *International Journal of Engineering Science*, v. 21, n. 8, p. 863–960, 1983.
- BENAISSA, A.; BENGUESSOUM, A.; MESSAOUDI, S. Energy decay of solutions for a wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, v. 11, p. 1–13, 2014.
- BENYOUB, F. Z.; FERHAT, M.; HAKEM, A. Global existence and asymptotic stability for a coupled viscoelastic wave equation with a time-varying delay term. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 6, p. 119–156, 2018.
- BOFILL, F.; QUINTANILLA, R. Anti-plane shear deformations of swelling porous elastic soils. *Int. J. Eng. Sci.*, v. 41, n. 8, p. 801–816, 2003.
- BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.*, v. 347, p. 455–478, 2010.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEXEIRA, E. *Fundamentos da Análise Funcional*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2010.
- CAO, X. G.; LIU, D. Y.; XU, G. D. Easy test for stability of laminated beams with structural damping and boundary feedback controls. *J. Dyn. Control Syst.*, v. 13, p. 313–336, 2007.
- CHEN, G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain, part i. *SIAM J. Control Optim.*, v. 17, p. 66–81, 1979.
- CHEN, G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain, part ii. *SIAM J. Control Optim.*, v. 19, p. 114–122, 1981.
- CHEN, Z.; LIU, W. J.; CHEN, D. General decay rates for a laminated beam with memory. *Taiwanese J. Math.*, v. 23, p. 1227–1252, 2019.
- CHOUCHA, A.; OUCHENANE, D.; BOULAARAS, S. Well posedness and stability result for a thermoelastic laminated timoshenko beam with distributed delay term. *Math. Meth. Appl. Sci.*, v. 43, p. 9983–10004, 2020.
- DATKO, R. Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks. *SIAM J. Control Optim.*, v. 26, n. 3, p. 697–713, 1988.
- DATKO, R.; LAGNESE, J.; POLIS, M. P. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM J. Control Optim.*, v. 41, n. 1, p. 152–156, 1986.
- DATKO, R.; LAGNESE, J.; POLIS, M. P. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM J. Control Optim.*, v. 24, p. 152–156, 1986.
- DJILALI, L.; BENAÏSSA, A. Global existence and energy decay of solutions to a viscoelastic timoshenko beam system with a nonlinear delay term. *Taiwanese J. Math.*, v. 18, p. 1411–1437, 2015.
- ERINGEN, A. C. A continuum theory of swelling porous elastic soils. *International Journal of Engineering Science*, v. 32, n. 8, p. 1337–1349, 1994.
- FENG, B. Well-posedness and exponential decay for laminated timoshenko beams with time delays and boundary feedbacks. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 41, p. 1162–1174, 2018.
- FENG, B. et al. Dynamics of laminated timoshenko beams. *J. Dyn. Diff. Equat.*, v. 30, p. 1489–1507, 2018.
- FENG, B.; PELICER, M. L. Global existence and exponential stability for a nonlinear timoshenko system with delay. *Bound. Value Probl.*, v. 2015, n. 1, p. 206, 2017.
- FENG, B.; YANG, X. Long-time dynamics for a nonlinear timoshenko system with delay. *Appl. Anal.*, v. 96, n. 4, p. 606–625, 2017.
- FERHAT, M. Energy decay of solutions for the wave equation with a time varying delay term in the weakly nonlinear internal feedbacks. *Malaya J. Mat.*, v. 4, p. 284–296, 2016.
- GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 236, p. 385–394, 1978.
- GUESMIA, A. Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinity memory and time delay. *IMA J. Math. Control Inform.*, v. 30, p. 507–526, 2013.
- GUESMIA, A. Some well-posedness and general stability results in timoshenko systems with infinite memory and distributed time delay. *J. Math. Phys.*, v. 55, p. 127–150, 2014.



- H, B. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Amsterdam: Notas de Matemática, 50, Universidade Federal do Rio de Janeiro and University of Rochester, North Holland, 1973.
- HANSEN, S. W. A model for a two-layered plate with interfacial slip. In: *Control and Estimation of Distributed Parameter Systems: Nonlinear Phenomena*. Austria: International Conference in Vorau, 1994. 143-170 p.
- HANSEN, S. W.; SPIES, R. Structural damping in a laminated beams duo to interfacial slip. *J. Sound Vibration*, v. 204, n. 1, p. 183-202, 1997.
- HARAUX, A. Two remarks on dissipative hyperbolic problems. *Research Notes in Mathematics*, v. 122, p. 161-179, 1985.
- HUANG, F. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in hilbert space. *Ann. Differ. Equ.*, v. 1, p. 43-56, 1985.
- HUECKEL, T. Water mineral interaction in hygromechanics of clays exposed to environ-mental loads: a mixture theory approach. *Geotech. J.*, v. 29, p. 1071-1086, 1992.
- KAFINI, M. et al. Well-posedness and stability results in a timoshenko-type system of thermoelasticity of type iii with delay. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 66, p. 1499-1517, 2015.
- KARABOMI, S. et al. The swelling of clays: Molecularsimulations of the hydration of montmorillonite. *Science*, v. 271, p. 1102-1104, 1996.
- KATO, T. Nonlinear semigroups and evolution equations. *J. Math. Soc. Japan*, v. 19, p. 508-520, 1967.
- KATO, T. *Perturbation theory for linear operators*. New York: Springer-Verlag, 1980.
- KATO, T. *Abstract differential equations and nonlinear mixed problems*. Pisa: Lezioni Fermiane, [Fermi Lectures], Scuola Normale Superiore, 1985.
- KATO, T. *Linear and quasi-linear equations of evolution of hyperbolic type*. Berlin: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- KIRANE, M.; SAID-HOUARI, B. Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 6, p. 1065-1082, 2011.
- KIRANE, M.; SAID-HOUARI, B.; ANWAR, M. N. Stability result for the timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks. *Commun. Pure Appl. Anal.*, v. 10, n. 2, p. 667-686, 2011.
- KLIKA, V. A guide through available mixture theories for applications. *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*, v. 39, n. 2, p. 154-174, 2013.
- KOMORNIK, V. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*. Paris: Masson-John Wiley, 1994.
- KOMORNIK, V.; ZUAZUA, E. A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 69, n. 1, p. 33-54, 1990.
- LASIECKA, I.; TRIGGIANI, R. Uniform exponential energy decay of wave equations in a bounded region with  $L^2(0, \infty, L^2(\gamma))$ -feedback control in the dirichlet boundary conditions. *J. Differential Equations*, v. 66, p. 340-390, 1987.

- LIU, G. Well-posedness and exponential decay of solutions for a transmission problem with distributed delay. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 174, p. 1–13, 2017.
- LIU, W. General decay rate estimate for the energy of a weak viscoelastic equation with an internal time-varying delay term. *Taiwanese Journal of Mathematics*, v. 17, p. 2101–2115, 2013.
- LIU, W.; CHEN, M. Well-posedness and exponential decay for a porous thermoelastic system with second sound and a time-varying delay term in the internal feedback. *Continuum Mech. Therm.*, v. 3, p. 731–746, 2017.
- LO, A.; TATAR, N. E. Stabilization of laminated beams with interfacial slip. *Electron. J. Differ. Equ.*, v. 129, p. 1–14, 2015.
- LO, A.; TATAR, N. E. Uniform stability of a laminated beam with structural memory. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, v. 15, p. 517–540, 2016.
- MAKHELOUFI, H.; BAHLIL, M.; FENG, B. Optimal polynomial decay for a timoshenko system with a strong damping and a strong delay. *Math. Meth. Appl. Sci.*, v. 44, p. 6301–6317, 2021.
- MEHMETI, F. A. *Nonlinear waves in networks*. New York: Vol 80 of Mathematical Research, Akademie-Verlag, 1972.
- MPUNGU, K.; APALARA, T. A.; MUMINOV, M. On the stabilization of laminated beams with delay. *Appl. Math.*, v. 66, p. 789–812, 2021.
- MUSTAFA, M. I. Boundary control of laminated beams with interfacial slip. *J. Math. Phys.*, v. 59, p. 051508, 2018.
- MUSTAFA, M. I. Laminated timoshenko beams with viscoelastic damping. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 466, p. 619–641, 2018.
- NAKAO, M. Decay of solutions of some nonlinear evolution equations. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 60, p. 542–549, 1977.
- NICAISE, S.; PIGNOTTI, C. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM J. Control Optim.*, v. 45, p. 1561–1585, 2006.
- NICAISE, S.; PIGNOTTI, C. Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Differential Integral Equations*, v. 21, p. 935–958, 2008.
- NICAISE, S.; PIGNOTTI, C. Interior feedback stabilization of wave equations with time dependence delay. *Electron. J. Differ. Equ.*, v. 41, p. 1–20, 2011.
- NICAISE, S.; PIGNOTTI, C.; VALEIN, J. Exponential stability of the wave equation with boundary time-varying delay. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, v. 4, n. 3, p. 693–722, 2011.
- NONATO, C.; RAPOSO, C.; FENG, B. Exponential stability for a thermoelastic laminated beam with nonlinear weights and time-varying delay. *Asymptotic Analysis*, v. 126, n. 1-2, p. 157–185, 2022.
- NONATO, C.; SANTOS, M. J. D.; RAPOSO, C. Dynamics of timoshenko system with time-varying weight and time-varying delay. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, v. 27, n. 1, p. 523–553, 2022.
- PARK, S. Long-time behavior for suspension bridge equations with time delay. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 69, n. 45, p. 1–12, 2018.
- PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Vol. 44 of Applied Math. Sciences, Springer-Verlag, 1983.

- PRÜSS, J. On the spectrum of  $c_0$ -semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 284, p. 847–857, 1984.
- QUINTANILLA, R. Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 145, p. 525–533, 2002.
- QUINTANILLA, R. On the linear problem of swelling porous elastic soils. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 269, n. 1, p. 50–72, 2002.
- QUINTANILLA, R. Exponential stability of solutions of swelling porous elastic soils. *Meccanica*, v. 39, n. 1, p. 139–145, 2004.
- RAMOS, A. J. A. et al. Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping. *J. Math. Phys.*, v. 61, p. 101505, 2020.
- RAMOS, A. J. A. et al. Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms. *J. Math. Phys.*, v. 62, p. 021507, 2021.
- RAMOS, A. J. A. et al. Existence of attractors for a nonlinear timoshenko system with delay. *J. Dyn. Differential Equations*, p. 1–24, 2019.
- RAPOSO, C. et al. Exponential decay and numerical solution for a timoshenko system with delay term in the internal feedback. *Int. J. Anal. Appl.*, v. 3, n. 1, p. 1–13, 2013.
- RAPOSO, C. A. Exponential stability for a structure with interfacial slip and frictional damping. *Appl. Math. Lett.*, v. 53, p. 85–91, 2016.
- RAPOSO, C. A.; APALARA, T. A.; RIBEIRO, J. O. Analyticity to transmission problem with delay in porous-elasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 466, n. 1, p. 819–834, 2018.
- RAPOSO, C. A. et al. Well-posedness and exponential stability for a wave equation with nonlocal time-delay condition. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 279, p. 1–11, 2017.
- RAPOSO, C. A. et al. Hybrid laminated timoshenko beam. *J. Math. Phys.*, v. 58, p. 101512, 2017.
- REMIL, M.; HAKEM, A. Global existence and asymptotic behavior of solutions to the viscoelastic wave equation with a constant delay term. *FACTA UNIVERSITATIS (NIS) Ser. Math. Inform.*, v. 32, p. 485–502, 2017.
- RIVERA, J. . E. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkcial. Ekvac.*, v. 35, n. 1, p. 19–30, 1992.
- SAID-HOUARI, B.; LASKRI, Y. A stability result of a timoshenko system with a delay term in the internal feedback. *Appl. Math. Comput.*, v. 217, n. 6, p. 2857–2869, 2010.
- SANTOS, M. J. D. et al. Global and exponential attractors for a nonlinear porous elastic system with delay term. *Discrete Contin. Dyn. Syst. B*, v. 11, p. 1–24, 1920.
- SANTOS, M. J. D. et al. Long-time dynamics of a nonlinear timoshenko beam with discrete delay term and nonlinear damping. *J. Math. Phys.*, v. 61(061505), p. 1–17, 2020.
- SRIDHARAN, A.; RAO, G. V. Mechanisms controlling the secondary compression of clays. *Geotechnique*, v. 32, n. 3, p. 249–260, 1982.
- TAHAMTANI, F.; PEYRAVI, A. Asymptotic behavior and blow-up of solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation. *Taiwanese Journal of Mathematics*, v. 17, p. 1921–1943, 2013.

- TATAR, N. E. Stabilization of a laminated beam with interfacial slip by boundary controls. *Bound. Value Probl.*, v. 169, 2015.
- THAN, A. A.; WANG, J. Stabilization of the cascaded ode-schrödinger equations subject to observation with time delay. *Journal of Automatica Sinica*, v. 6, p. 1027–1035, 2019.
- WANG, J.; XU, G. Q.; YUNG, S. Exponential stabilization of laminated beams with structural damping and boudary feedback controls. *SIAM J. Control Optim.*, v. 44, p. 1575–1597, 2005.
- WANG, J.-M.; GUO, B.-Z. On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 71, p. 565–582, 2006.
- WANG, S.; MA, Q. Uniform attractors for the non-autonomous suspension bridge equation with time delay. *J Inequal Appl.*, v. 2019, p. 180, 2019.
- WILCOX, R. D. Surface area approach key to borehole stability. *Oil and Gas J.*, v. 26, p. 66–80, 1990.
- WRAY, W. *So Your Home is Built on Expansive Soils*. New York: Amer. Soc. Civil Eng., 1995.
- XU, G. Q.; YUNG, S. P.; LI, L. K. Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, v. 12, n. 4, p. 770–785, 2006.
- YANG, K.-Y.; WANG, J.-M. Pointwise feedback stabilization of an euler-bernoulli beam in observations with time delay. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, v. 25, p. 1–23, 2019.
- YANG, X.; ZHANG, J.; LU, Y. Dynamics of the nonlinear timoshenko system with variable delay. *Appl. Math. Optim.*, v. 83, p. 297–326, 2021.

# APÊNDICE A

## Publicações

### Artigos publicados:

1. Apalara, Tijani A., Raposo, Carlos A. e Nonato, Carlos A. S. Exponential stability for laminated beams with a frictional damping. *Archiv der Mathematik*, v. 114, p. 471-480, 2019.
2. Barros, V., Nonato, C. A. S. e Raposo, C. A. Global existence and energy decay of solutions for a wave equation with non-constant delay and nonlinear weights. *Electronic Research Archive*, v. 28, p. 205-220, 2020.
3. Raposo, C. A., Villagran, O. V., Nonato, C. A. S. e Hguyen, H. H. Stability of laminated beams with second sound. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, v. 7, p. 1-14, 2020.
4. Raposo, C. A., Nonato, C. e Villagran, O. V. e Chuquipoma, J. A. D. Global solution and exponential stability for a laminated beam with Fourier thermal law. *Journal of Partial Differential Equations*, v. 33, p. 143-157, 2020.
5. Nonato, C., Raposo, C. e Hguyen, H. H. Exponential stability for a Timoshenko system with nonlocal delay. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 21, p. 395-407, 2020.
6. Raposo, C. A., Ayala, Y. S. S. e Nonato, C. A. S. Laminated beams with time-varying delay. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 58, p. 929-945, 2021.
7. Nonato, C., Raposo, C. A. e Feng, B. Exponential stability for a thermoelastic laminated beam with nonlinear weights and time-varying delay. *Asymptotic Analysis*, v. 126, p. 157-185, 2022.
8. Kong, A., Nonato, C., Liu, W., Santos, M. J. e Raposo, C. A. Equivalence between exponential stabilization and observability inequality for magnetic effected piezoelectric beams with time-varying delay and time-dependent weights. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, v. 27, p. 2959-2978, 2022.

9. Nonato, C. A. S., Ramos, A. J. A., Raposo, C. A., Dos Santos, M. J. e Freitas, M. M. Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation, time varying-delay and time-varying weights. *Zeitschrift fur Angewandter Mathematik und Physik*, v. 73, p. 1-20, 2022.
10. Ramos, A. J. A., Villagran, O. V., Nonato, C. e Raposo, C. A. Stability for a weakly coupled wave equations with a boundary dissipation of fractional derivative type. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Testo Stampato)*, p. 1-29, 2022.
11. Nonato, C., Dos Santos, M. J., Raposo, C. Dynamics of Timoshenko system with time-varying weight and time-varying delay. *Discrete And Continuous Dynamical Systems-Series B*, v. 27, p. 523-553, 2022.
12. Feng, B., Raposo, C. A., Nonato, C. e Soufyane, A. Analysis of exponential stabilization for Rao-Nakra sandwich beam with time-varying weight and time-varying delay: Multiplier method versus observability. *Mathematical Control and Related Fields*, v. 0, p. 1-33, 2022.
13. Villagran, O. V., Raposo, C. A., Nonato, C. A. S. e Ramos, A. J. A. Stability of solution for Rao-Nakra sandwich beam with boundary dissipation of fractional derivative type. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, v. 13, p. 116-143, 2022.
14. Ramos, A. J. A., Nonato, C. A. S., Campelo, A. D. S., Freitas, M. M. e Silva, D. W. G. Exponential stabilization of piezoelectric beams with magnetic effect and second sound. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, v. 73, p. 187, 2022.
15. Nonato, C., Raposo, C. A., Feng, B. e Ramos, A. J. A. Stability analysis of laminated beams with Kelvin-Voigt damping and strong time delay. *Asymptotic Analysis*, p. 1-26, 2022.
16. Kong, A., Nonato, C., Liu, W., Dos Santos, M. J., Raposo, C. A. e An, Y. Exponential stability for magnetic effected piezoelectric beams with time-varying delay and time-dependent weights. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, v. 0, p. 1-22, 2022.

#### **Artigos aceitos:**

1. Nonato, C. A., Dos Santos, M. J., Avila, J. A. J. e Raposo, C. A. A stability and numerical study of the solutions of a Timoshenko system with distributed delay, *Mathematische Nachrichten*, in press.
2. Nonato, C. A. S., Raposo, C. A. e Bastos, W. D. A transmission problem for waves under time-varying delay and time-varying weights, *Methods and Applications of Analysis*, in press.

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

[www.pgmat.ufba.br](http://www.pgmat.ufba.br)